TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG
KHOA SƯ PHẠM TỰ NHIÊN

BÀI GIẢNG

HỌC PHẦN: HÌNH HỌC XẠ ẢNH

Mã học phần: 30

Ngành đào tạo: Sư phạm Toán học

1. Giảng viên biên soạn: ThS. Bùi Thị Hoàng Phương
2. Số tín chỉ: 02
3. Đơn vị quản lý học phần: Bộ môn Toán khoa SPTN

Quảng Ngãi, tháng 7 - 2024

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG
KHOA SƯ PHẠM TỰ NHIÊN

BÀI GIẢNG

HỌC PHẦN: HÌNH HỌC XẠ ẢNH

Mã học phần: 30

Ngành đào tạo: Sư phạm Toán học

1. **Giảng viên biên soạn: ThS. Bùi Thị Hoàng Phương**
2. **Số tín chỉ: 02**
3. **Đơn vị quản lý học phần: Bộ môn Toán khoa SPTN**

Quảng Ngãi, tháng 7 - 2024

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU

Bài giảng hình học xạ ảnh được biên soạn dựa theo chương trình Đại học Sư phạm Toán của trường Đại học Phạm Văn Đồng đã ban hành, dành cho sinh viên năm 2 ngành Sư phạm Toán.

Bài giảng gồm 3 chương với thời lượng 2 tín chỉ (30 tiết). Ở mỗi chương đều có mục tiêu và cuối mỗi chương đều có bài tập để sinh viên luyện tập.

Chương 1: Không gian xạ ảnh.

Chương 2: Ánh xạ xạ ảnh và biến đổi xạ ảnh.

Chương 3: Siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh.

Chúng tôi hy vọng tập bài giảng "Hình học xạ ảnh" là một tài liệu học tập bổ ích cho sinh viên và là nguồn tài liệu phong phú cho quý thầy cô giáo tham khảo nghiên cứu.

Mặc dù đã cố gắng, tuy nhiên bài giảng sẽ không tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp để tập bài giảng ngày càng hoàn thiện hơn.

Chương 1

KHÔNG GIAN XẠ ẢNH

- Mục tiêu của chương này giúp người học nắm được định nghĩa không gian xạ ảnh và các phẳng của nó cũng như phương các $m-$ phẳng; nắm được các mô hình của không gian xạ ảnh, mục tiêu xạ ảnh, nguyên tắc đối ngẫu trong không gian xạ ảnh và mô hình xạ ảnh của không gian afin.

- Biết vận dụng lý thuyết vào giải các bài tập.

1.1 Định nghĩa không gian xạ ảnh và các phẳng của nó

1.1.1 Kí hiệu

Cho $\mathbb{V}^n$ là không gian vector n chiều trên trường $\mathbb{K}$, với $n \geqslant 1$. Ta kí hiệu $[\mathbb{V}^n]$ là tập hợp các không gian vector con một chiều của $\mathbb{V}^n$.

Ký hiệu $[\mathbb{V}^1]$ là tập hợp gồm chỉ một phần tử $\mathbb{V}^1$, nghĩa là: $[\mathbb{V}^1] = \{\mathbb{V}^1\}$.

1.1.2 Định nghĩa không gian xạ ảnh

Cho một tập hợp $\mathbb{P}$, một $\mathbb{K}-$ không gian vector $n+1$ chiều $\mathbb{V}^{n+1}$, và một song ánh $p : [\mathbb{V}^{n+1}] \to \mathbb{P}$. Khi đó, bộ ba $(\mathbb{P}, p, \mathbb{V}^{n+1})$ được gọi là *không gian xạ ảnh n chiều trên trường* $\mathbb{K}$*, liên kết với* $\mathbb{K}-$ *không gian vector* $\mathbb{V}^{n+1}$ *bởi song ánh* p.

Nếu không sợ bị nhầm lẫn, có thể kí hiệu không gian xạ ảnh đó là $\mathbb{P}$, và để chỉ rõ nó có số chiều bằng n, ta kí hiệu nó là $\mathbb{P}^n$.

Không gian xạ ảnh trên trường số thực $\mathbb{R}$ gọi là *không gian xạ ảnh thực,* kí hiệu là $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; không gian xạ ảnh trên trường số phức $\mathbb{C}$ gọi là *không gian xạ ảnh phức,* kí hiệu là $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Mỗi phần tử của $\mathbb{P}^n$ được gọi là *một điểm* của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$.

Gọi $\overrightarrow{u}$ là vector khác $\overrightarrow{0}$ của $\mathbb{V}^{n+1}$ và $\langle\overrightarrow{u}\rangle$ là không gian vector con một chiều sinh bởi $\overrightarrow{u}$, thì $p(\langle\overrightarrow{u}\rangle) = U$ là một điểm nào đó của $\mathbb{P}^n$. Khi đó ta nói rằng *vector $\overrightarrow{u}$ là đại diện của điểm U.*

Hai vector $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{u}'$ (khác $\overrightarrow{0}$) cùng đại diện cho một điểm khi và chỉ khi chúng phụ thuộc tuyến tính, tức là $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}$, với $k \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

1.1.3 Định nghĩa phẳng

Cho không gian xạ ảnh $(\mathbb{P}^n, p, \mathbb{V}^{n+1})$. Gọi W là không gian vector con $m+1$ chiều của $\mathbb{V}^{n+1}$ $(m \geqslant 0)$. Khi đó tập hợp $p([\mathbb{W}])$ được gọi là *cái phẳng m chiều (hoặc là m - phẳng) của* $\mathbb{P}^n$.

Như vậy, mỗi điểm của $\mathbb{P}^n$ là một 0 - phẳng.

- Phẳng 1 chiều (hay 1 - phẳng) còn gọi là *đường thẳng.*

- Phẳng 2 chiều (hay 2 - phẳng) còn gọi là *mặt phẳng.*

- Phẳng $n-1$ chiều (hay $(n-1)$ - phẳng) còn gọi là *siêu phẳng.*

1.1.4 Định nghĩa hệ điểm độc lập

Hệ r điểm $(r \geqslant 1)$ của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ gọi là *hệ điểm độc lập* nếu hệ r vector đại diện cho chúng là hệ vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{V}^{n+1}$.

Hệ điểm không độc lập gọi là *hệ điểm phụ thuộc.*

Hệ chỉ có một điểm là hệ độc lập. Hệ gồm hai điểm là hệ độc lập nếu hai điểm đó phân biệt.

Định lý 1.1.1. *Hệ r điểm (với $r \geqslant 2$) là độc lập khi và chỉ khi chúng không cùng thuộc một $(r-2)$ - phẳng.*

Chứng minh. Giả sử $M_1, M_2, ..., M_r$ là r điểm của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, có đại diện lần lượt là r vector $\overrightarrow{m}_1, \overrightarrow{m}_2, ...\overrightarrow{m}_r$ của $\mathbb{V}^{n+1}(r \geqslant 2)$. Hệ điểm M_i là độc lập khi và chỉ khi các vector $\overrightarrow{m}_i$ độc lập tuyến tính, hay khi và chỉ khi các vector $\overrightarrow{m}_i$ không nằm trên một không gian vector con $(r-1)$ chiều của $\mathbb{V}^{n+1}$, tức là khi và chỉ khi hệ điểm M_i không cùng nằm trên một $(r-2)$ - phẳng. □

Định lý 1.1.2. *Có duy nhất một $(r-1)$ - phẳng đi qua hệ r điểm độc lập cho trước.*

Chứng minh. Giả sử cho hệ r điểm độc lập $M_1, M_2, ..., M_r$ trong $\mathbb{P}^n$. Các vector $\overrightarrow{m}_i$ đại diện cho chúng làm thành hệ vector độc lập tuyến tính nên có duy nhất một không gian vector con r chiều $\mathbb{W}$ chứa chúng. Khi đó $p([\mathbb{W}])$ chính là $(r-1)$ - phẳng đi qua r điểm M_i. □

Kí hiệu: $(r-1)$ - phẳng đi qua r điểm độc lập M_i được kí hiệu là $\langle M_1, M_2, ...M_r\rangle$. Chẳng hạn: nếu A, B, C là 3 điểm độc lập thì $\langle A, B, C\rangle$ là mặt phẳng đi qua A, B, C. Đường thẳng đi qua A, B kí hiệu là $\langle A, B\rangle$, hoặc cũng còn kí hiệu đơn giản là AB.

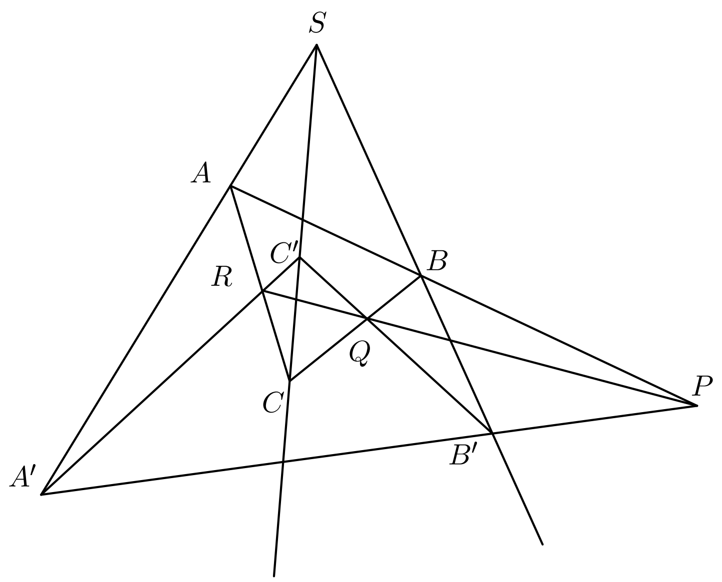
1.1.5 Định lí đơdác thứ nhất

Định lý 1.1.3. *(Định lí đơdác (Desargues)): Trong không gian xạ ảnh cho 6 điểm A, B, C, A', B', C' trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó, hai mệnh đề sau đây tương đương:*

a) Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy (có điểm chung).

b) Giao điểm của các cặp đường thẳng AB và$A'B'$; BC và $B'C'$; CA và $C'A'$ là ba điểm thẳng hàng.

Chứng minh. $*$ $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b}$: Giả sử 3 đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy tại S. Gọi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}'$, $\overrightarrow{b}'$, $\overrightarrow{c}'$ và $\overrightarrow{s}$ lần lượt là các vector đại diện của các điểm A, B, C, A', B', C' và S. Vì A, A', S phân biệt và thẳng hàng nên 3 vector $\langle\overrightarrow{a}\rangle, \langle\overrightarrow{a}'\rangle, \langle\overrightarrow{s}\rangle$ cùng thuộc một không gian vector con hai chiều, do đó, nếu đã chọn trước vector $\overrightarrow{s}$ thì có thể chọn $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{a}'$ sao cho:



$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}'.$$

Tương tự đối với $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}'$ và $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}'$.

Tóm lại, ta có thể chọn sao cho:

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}' = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}' = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c}'.$$

Từ đó suy ra, nếu đặt $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, thì $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}' - \overrightarrow{a}'$, nên vector $\overrightarrow{p}$ đại diện cho điểm P là giao điểm của 2 đường thẳng AB và $A'B'$.

Tương tự, vector $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}' - \overrightarrow{b}'$ đại diên cho giao điểm Q của BC và $B'C'$; và vector $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}' - \overrightarrow{c}'$ đại diện cho giao điểm R của CA và $C'A'$. Nhưng $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$, nên 3 điểm P, Q, R phụ tuộc, nghĩa là chúng thẳng hàng.

$*$**b** $\Rightarrow$ **a** : Giả sử $AB \cap A'B' = P,\ BC \cap B'C' = Q,\ CA \cap C'A' = R$, và P, Q, R thẳng hàng. Xét 6 điểm A, A', R, B, B', Q ta thấy trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, ngoài ra, ba đường thẳng $AB, A'B'$ và RQ đồng quy tại P. Bởi vậy, theo chứng minh phần trên ta suy ra giao điểm S của AA' và BB', giao điểm C của AR và BQ, giao điểm C' của $A'R$ và $B'Q$ thẳng hàng, nói cách khác, 3 đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy. □

1.2 Các mô hình của không gian xạ ảnh

1.2.1 Mô hình vector

Cho $\mathbb{V}^{n+1}$ là $\mathbb{K}$ - không gian vector bất kì. Khi đó tập hợp $\mathbb{P} = [\mathbb{V}^{n+1}]$ trở thành $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh n chiều liên kết với $\mathbb{V}^{n+1}$ bởi ánh xạ đồng nhất của $[\mathbb{V}^{n+1}]$ lên chính nó: $p = Id : [\mathbb{V}^{n+1}] \to [\mathbb{V}^{n+1}]$. Mỗi điểm của không gian xạ ảnh này là một không gian vector con 1 chiều của $\mathbb{V}^{n+1}$. Mỗi m - phẳng là tập hợp các không gian vector 1 chiều thuộc một không gian vector con $m + 1$ chiều trong $\mathbb{V}^{n+1}$.

1.2.2 Mô hình bó

Cho $\mathbb{A}^{n+1}$ là không gian afin liên kết với $\mathbb{K}$ - không gian vector $n+1$ chiều $\mathbb{V}^{n+1}$. Gọi $\mathbb{B}$ là tập hợp các đường thẳng của $\mathbb{A}^{n+1}$ cùng đi qua một điểm O cố định chọn trước. Tập hợp $\mathbb{B}$ thường được gọi là *bó đường thẳng có tâm là O*.

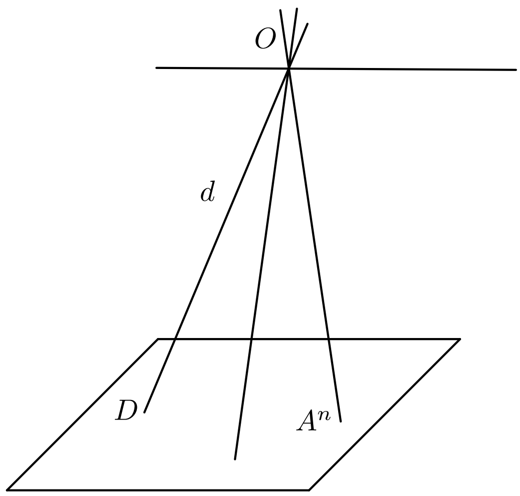
Song ánh $p : [\mathbb{V}^{n+1}] \to \mathbb{B}$ được xác định như sau: nếu $\mathbb{W}$ là không gian vector con 1 chiều của $\mathbb{V}^{n+1}$ thì $p(\mathbb{W})$ là đường thẳng đi qua O có phương là $\mathbb{W}$. Bằng cách đó bó đường thẳng $\mathbb{B}$ trở thành $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh n chiều.

Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{B}$, mỗi điểm là một đường thẳng của $\mathbb{A}^{n+1}$ đi qua O. Mỗi m - phẳng là tập hợp các đường thẳng đi qua O và nằm trong cái phẳng $m + 1$ chiều của $\mathbb{A}^{n+1}$.

1.2.3 Mô hình afin

Giả sử $\mathbb{P}$ là không gian xạ ảnh liên kết với không gian vector $\mathbb{V}$ bởi song ánh p. Khi đó nếu có tập hợp $\mathbb{P}'$ và song ánh $p' : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$, thì $\mathbb{P}'$ cũng là không gian xạ ảnh liên kết với $\mathbb{V}$ bởi song ánh $p'_o p$.

Bây giờ cho $\mathbb{A}^{n+1}$ là không gian afin liên kết với $\mathbb{K}$ - không gian vector $n+1$ chiều $\mathbb{V}^{n+1}$. Gọi $\mathbb{A}^n$ là một siêu phẳng của $\mathbb{A}^{n+1}$, có phương là không gian vector con n chiều $\mathbb{V}^n$ của $\mathbb{V}^{n+1}$. Xét tập hợp $\mathbb{P} = \mathbb{A}^n \cup [\mathbb{V}^n]$, mà mỗi phần tử của nó đều gọi là một điểm. Như vậy, mỗi điểm của $\mathbb{P}$ là một điểm của $\mathbb{A}^n$, hoặc là một không gian vector con 1 chiều của $\mathbb{V}^n$.



Chọn một điểm O của $\mathbb{A}^{n+1}$ không nằm trên $\mathbb{A}^n$, và gọi $\mathbb{B}$ là bó đường thẳng $\mathbb{A}^{n+1}$, có tâm O. Ta đã biết rằng $\mathbb{B}$ là một không gian xạ ảnh n chiều. Bây giờ ta xây dựng song ánh $p' : \mathbb{B} \to \mathbb{P}$ như sau:

+ Nếu đường thẳng d của bó $\mathbb{B}$ cắt $\mathbb{A}^n$ tại điểm D thì đặt: $p'(d) = D$.

+ Nếu $d//\mathbb{A}^n$, tức là $\overrightarrow{d} \subset \mathbb{V}^n$ thì đặt $p'(d)\langle \overrightarrow{d} \rangle$.

  Bằng cách đó tập $\mathbb{P} = \mathbb{A}^n \cup [\mathbb{V}^n]$ trở thành không gian xạ ảnh liên kết với $\mathbb{A}^{n+1}$.

  Trong không gian đó, mỗi m - phẳng sẽ là:

+ hoặc tập hợp $\mathbb{A}^m \cup [\overrightarrow{\mathbb{V}}^m]$, trong đó $\mathbb{A}^m$ là m - phẳng nào đó của $\mathbb{A}^n$.

+ hoặc tập hợp $[\mathbb{A}^{m+1}]$, với $\mathbb{V}^{m+1}$ là không gian vector con $m+1$ chiều của $\mathbb{V}^{m+1}$.

1.2.4 Mô hình xây dựng từ một trường

Cho $\mathbb{K}$ là một trường nào đó, $\mathbb{K}^{n+1}$ là tích Đề-các của $\mathbb{K}$ với chính nó $n+1$ lần, tức là:

$$\mathbb{K}^{n+1} = \{(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)\ |x_i \in \mathbb{K}\}.$$

Ta biết rằng $\mathbb{K}^{n+1}$ là không gian vector $n+1$ chiều trên $\mathbb{K}$, bởi vậy $[\mathbb{K}^{n+1}]$ là không gian xạ ảnh n chiều liên kết với $\mathbb{K}^{n+1}$.

Trong tập $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ (ở đây, $(0 = 0, 0, 0, ..., 0)$) ta đưa vào một quan hệ tương đương như sau:

$(x_0, x_1, ..., x_n) \sim (y_0, y_1, ..., y_n)$ khi và chỉ khi có số $k \in \mathbb{K}$ sao cho $y_i = kx_i$ với mọi $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Khi đó, mỗi lớp tương đương cùng với vector 0 làm thành một không gian vector con một chiều của $[\mathbb{K}^{n+1}]$ tức là một điểm của $[\mathbb{K}^{n+1}]$.

1.3 Toạ độ xạ ảnh

1.3.1 Mục tiêu xạ ảnh

Cho không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ liên kết với $\mathbb{K}$ - không gian vector $\mathbb{V}^{n+1}$. Một tập hợp có thứ tự gồm $n+2$ điểm của $\mathbb{P}^n$: $\{S_0, S_1, ..., S_n; E\}$ được gọi là *mục tiêu xạ ảnh* nếu bất kì $n+1$ điểm trong $n+2$ điểm đó độc lập.

Các điểm S_i gọi là các *đỉnh* của mục tiêu xạ ảnh, điểm E gọi là điểm *đơn vị.*

Các m - phẳng $(m < n)$ đi qua $m+1$ đỉnh gọi là các *m - phẳng toạ độ,* đặc biệt các đường thẳng S_iS_j với $i \neq j$, gọi là các *trục toạ độ.*

Định lý 1.3.1. *Với mỗi mục tiêu xạ ảnh $\{S_0, S_1, ..., S_n : E\}$, luôn luôn tìm được một cơ sở $\{\overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ của $\mathbb{V}^{n+1}$ sao cho vector $\overrightarrow{e}_i$ là đại diện của đỉnh S_i $(i = 0, 1, ..., n)$ và vector $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{e}_0 + \overrightarrow{e}_1 + ... + \overrightarrow{e}_n$ là đại diện của điểm E.*

Chứng minh. Ta lấy các vector $\overrightarrow{e}_i$ đại diện cho các đỉnh S_i và vector $\overrightarrow{e}$ đại diện cho điểm E. Vì $n+1$ đỉnh S_i độc lập nên $n+1$ vector $\overrightarrow{e}_i$ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{V}^{n+1}$. Vì thế ta có:

$$\overrightarrow{e} = k_0\overrightarrow{e}'_0 + k_1\overrightarrow{e}'_1 + ... + k_n\overrightarrow{e}'_n.$$

Ta nhận thấy các k_i đều khác 0, bởi vì nếu $k_0 = 0$ chẳng hạn thì $n+1$ vector $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, ..., \overrightarrow{e}'_n, \overrightarrow{e}$ phụ thuộc tuyến tính, do đó $n+1$ điểm $S_1, S_2, ..., S_n, E$ không độc lập.

Bây giờ ta đặt $\overrightarrow{e} = k_i\overrightarrow{e}'_i$ thì $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ là cơ sở cần tìm. □

Chú ý. Cơ sở nói trong định lý được gọi là *cơ sở đại diện* cho mục tiêu xạ ảnh đang xét. Mục tiêu xạ ảnh có nhiều cơ sở đại diện, nhưng *chúng chỉ khác nhau một phép vị tự* trong $\mathbb{V}^{n+1}$. Thật vậy, hai cơ sở $\{\overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ và $\{\overrightarrow{e}'_0, \overrightarrow{e}'_1, ..., \overrightarrow{e}'_n\}$ cùng đại diện cho một mục tiêu xạ ảnh khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{e}_i = k_i\overrightarrow{e}'_i \ (i = 0, 1, ..., n)$$

và

$$\overrightarrow{e}_0 + \overrightarrow{e}_1 + ... + \overrightarrow{e}_n = k(\overrightarrow{e}'_0 + \overrightarrow{e}'_1 + ... + \overrightarrow{e}'_n),$$

do đó

$$k_1 = k_2 = ... = k_n = k.$$

1.3.2 Toạ độ của điểm đối với một mục tiêu xạ ảnh

Trong $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ liên kết với $\mathbb{V}^{n+1}$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ có đại diện là cơ sở $\{\overrightarrow{e}_i\}$ của $\mathbb{V}^{n+1}$. Với mỗi điểm X bất kì của $\mathbb{P}^n$ ta lấy vector $\overrightarrow{x}$ đại diện cho X. Khi đó, toạ độ $(x_0, x_1, ..., x_n)$ của vector $\overrightarrow{x}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e}_i\}$ cũng được gọi là *toạ độ của điểm* X đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$, và viết $X = (x_0, x_1, ..., x_n)$.

Toạ độ của điểm X có các tính chất sau đây:

a. Toạ độ gồm một bộ có thứ tự của $n+1$ số thuộc trường $\mathbb{K}$, trong đó có ít nhất một số khác không (vì vector đại diện cho một điểm luôn luôn là vector khác $\overrightarrow{0}$).

b. Hai bộ số $(x_0, x_1, ..., x_n)$ và $(x'_0, x'_1, ..., x'_n)$ cùng là toạ độ của một điểm khi và chỉ khi có $k \in \mathbb{K} \setminus 0$ để $x_i = kx'_i$, nói cách khác là hai bộ số đó gồm các số tương ứng tỉ lệ với nhau. Để diễn tả tính chất đó, người ta thường viết toạ độ của một điểm X dưới dạng:

$$X = (x_0 \ : \ x_1 \ : \ ... \ : \ x_n).$$

c. Đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$, toạ độ các đỉnh S_i và điểm đơn vị là:

$$\begin{aligned}
S_0 &= (1 \ : \ 0 \ : \ 0 \ : \ ... \ : \ 0).\\
S_1 &= (0 \ : \ 1 \ : \ 0 \ : \ ... \ : \ 0).\\
&\dots\dots\dots\dots\\
S_n &= (0 \ : \ 0 \ : \ 0 \ : \ ... \ : \ 1).\\
E &= (1 \ : \ 1 \ : \ 1 \ : \ ... \ : \ 1).
\end{aligned}$$

1.3.3 Đổi mục tiêu xạ ảnh

Trong $\mathbb{P}^n$ cho hai mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ và $\{S'_i; E'\}$. Gọi toạ độ của điểm X đối với hai mục tiêu đó lần lượt là $(x_0 \ : \ x_1 \ : \ ... \ : \ x_n)$ và $(x'_0 \ : \ x'_1 \ : \ ... \ : \ x'_n)$. Ta hãy tìm sự liên hệ giữa các x_i và x'_i.

Gọi $\{\overrightarrow{e}_i\}$ và $\{\overrightarrow{e}'_i\}$ lần lượt là hai cơ sở đại diện cho hai mục tiêu đó thì $(x_0, x_1, ..., x_n)$ và $(x'_0, x'_1, ..., x'_n)$ chính là toạ độ của vector đại diện $\overrightarrow{x}$ của điểm X đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e}_i\}$ và $\{\overrightarrow{e}'_i\}$.

Từ đó ta suy ra:

$$kx_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} X'_j, \ i = 0, 1, 2, ..., n; \ k \neq 0. \tag{1.1}$$

Trong đó: $(a_{0i}, a_{1i}, ..., a_{ni})$ là toạ độ của $\overrightarrow{e}'_i$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e}_i\}$.

Hệ (1.1) được gọi là *công thức đổi mục tiêu xạ ảnh.*

Ma trận $A = (a_{ij}), \ i, j = 0, 1, ..., n$ chính là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{e}_i\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e}'_i\}$, nó cũng được gọi là *ma trận chuyển* từ mục tiêu $\{S_i; E\}$ sang mục tiêu $\{S'_i; E'\}$.

Ma trận chuyển mục tiêu được xác định sai khác một hằng số nhân khác không, có nghĩa là nếu A là ma trận chuyển ứng với hai mục tiêu nào đó thì pA $(p \neq 0)$ cũng là ma trận chuyển ứng với hai mục tiêu đó.

Nếu ta kí hiệu:

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

và gọi chúng là *ma trận cột toạ độ* của điểm X và X', thì công thức (*) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$k.x = A.x'.$$

1.4 Phương trình của m - phẳng

1.4.1 Phương trình tham số của m - phẳng

Trong $\mathbb{K}$ không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ liên kết với $\mathbb{K}$ - không gian vector $\mathbb{V}^{n+1}$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ có đại diện là cơ sở $\{\overrightarrow{e}_i\}$. Gọi $\mathbb{U}$ là m - phẳng liên kết với không gian vector con $m+1$ chiều $\overrightarrow{\mathbb{U}}$. Ta tìm thấy điều kiện cần và đủ để điểm $X = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ thuộc $\mathbb{U}$.

Trên $\mathbb{U}$ lấy $m+1$ điểm độc lập $A_0, A_1, ..., A_m$.

Nếu $A_i = (a_{i0} : a_{i1} : ... : a_{in})$ thì vector đại diện cho nó là $\overrightarrow{a}_i = (a_{i0} : a_{i1} : ... : a_{in})$. Khi đó, ma trận (a_{ij}), $i = 0, 1, 2, ..., m$; $j = 0, 1, 2, ..., n$ có hạng bằng $m+1$.

Điểm $X = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ thuộc $\mathbb{U}$ khi và chỉ khi vector đại diện cho nó là $\overrightarrow{x} = (x_0, x_1, ..., x_n)$ thuộc $\overrightarrow{\mathbb{U}}$, hay là:

$$\overrightarrow{x} = t_0\overrightarrow{a}_0 + t_1\overrightarrow{a}_1 + ... + t_n\overrightarrow{a}_n.$$

(x là ma trận cột toạ độ của điểm X, a_i là ma trận cột toạ độ của điểm A_i).

Bởi vậy

$$x_i = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}t_j, \; i = 0, 1, 2, ..., n \tag{1.2}$$

Hệ phương trình (1.2) gọi là *phương trình tham số* của m - phẳng $\mathbb{U}$, với $m+1$ tham số $t_0, t_1, ..., t_m$ không đồng thời bằng 0.

1.4.2 Kí hiệu

Đối với một điểm X có toạ độ $(x_0 : x_1 : ...x_n)$, ta còn dùng kí hiệu (X) để chỉ ma trận cột toạ độ của nó (trước đây ta dùng kí hiệu x):

$$(X) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

khi đó phương trình (1.2) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$(X) = t_0(A_0) + t_1(A_1) + ... + t_m(A_m) \tag{1.3}$$

trong đó các t_i không đồng thời bằng 0.

Đặc biệt, phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A, B có dạng:

$$(X) = k(A) + l(B).$$

trong đó, k và l không đồng thời bằng 0.

1.4.3 Phương trình tổng quát của m - phẳng

Hệ phương trình (1.2) gồm $n+1$ phương trình với $m+1$ tham số. Vì ma trận (a_{ij}) có hạng $m+1$ nên ta có thể khử $m+1$ tham số đó từ hệ phương trình trên. Cụ thể là: chọn $m+1$ phương trình độc lập trong (1.2) rồi giải hệ phương trình vừa chọn để tìm các tham số t_i theo a_{ij}, thay các giá trị đó của tham số vào $n-m$ phương trình còn lại của hệ (1.2) ta được hệ gồm $n-m$ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\sum_{j=0}^{n} b_{ij}x_j = 0,\ i = 1, 2, ..., n-m. \tag{1.4}$$

Trong đó ma trận $(b_{ij}),\ i = 1, 2, ..., n-m;\ j = 0, 1, 2, ..., n$ có hạng bằng $n-m$.

Hệ (1.4) gọi là *phương trình tổng quát* của m - phẳng $\mathbb{P}^m$.

Ngược lại, ta có thể chứng minh rằng, mỗi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất của các biến $x_0, x_1, ..., x_n$ với ma trận các hệ số có hạng bằng $n-m$ đều xác định cho ta một m - phẳng.

1.4.4 Toạ độ của siêu phẳng

Trong $\mathbb{P}^n$ với mục tiêu đã chọn, cho siêu phẳng $\mathbb{U}$ có phương trình tổng quát:

$$u_0x_0 + u_1x_1 + ... + u_nx_n = 0$$

hay

$$\sum_{j=0}^{m} u_i x_i = 0.$$

trong đó các u_i không đồng thời bằng 0.

Bộ số $(u_0, u_1, ..., u_n)$ được gọi là *toạ độ của siêu phẳng* $\mathbb{U}$ *đối với mục tiêu xạ ảnh đã chọn.* Cố nhiên khi đó $(ku_0, ku_1, ..., ku_n)$ cũng là toạ độ của siêu phẳng $\mathbb{U}$, bởi vậy, cũng giống như đối với toạ độ của điểm ta thường kí hiệu toạ độ của siêu phẳng $\mathbb{U}$ là:

$$\mathbb{U} = (u_0 : u_1 : ... : u_n).$$

Ví dụ 1.4.1. *Siêu phẳng đi qua mọi đỉnh của mục tiêu xạ ảnh trừ đỉnh S_i có phương trình: $x_i = 0$, và trừ toạ độ của nó là: $0 : ... : 0 : 1 : 0 : ... : 0$ (số 1 nằm ở vị trí thứ $i + 1$, ngoài ra là số 0).*

Đối với mỗi siêu phẳng $\mathbb{U} = (u_0 : u_1 : ... : u_n)$ ta cũng kí hiệu ma trận cột toạ độ của nó là u hoặc $(\mathbb{U})$. Như thế, phương trình của siêu phẳng $\mathbb{U}$ có thể viết dưới dạng ma trận:

$$(\mathbb{U})^t(\mathbb{X}) = 0.$$

1.5 Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng

1.5.1 Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng

Trong $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ liên kết với $\mathbb{V}^{n+1}$ cho 4 điểm thẳng hàng A, B, C, D trong đó có ba điểm A, B, C đôi một không trùng nhau. Ta gọi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ là các vector lần lượt đại diện cho các điểm A, B, C, D thì các vector đó thuộc một không gian vector 2 chiều, trong đó $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ độc lập tuyến tính. Ta suy ra có các số k_1, l_1 và k_2, l_2 sao cho:

$$\overrightarrow{c} = k_1\overrightarrow{a} + l_1\overrightarrow{b}.$$
$$\overrightarrow{d} = k_2\overrightarrow{a} + l_2\overrightarrow{b}.$$

(Ta chú ý rằng, $k_1 \neq 0$ và $l_1 \neq 0$ vì C không trùng với A và với B).

Khi đó, nếu tỉ số $\dfrac{k_2}{l_2} : \dfrac{k_1}{l_1}$ có nghĩa (tức là $l_2 \neq 0$), thì nó được gọi là *tỉ số kép* của 4 điểm thẳng hàng A, B, C, D và kí hiệu $[A, B, C, D]$.

Nếu $l_2 = 0$ thì phân số $\dfrac{k_2}{l_2}$ không có nghĩa. Khi đó ta xem tỉ số kép của 4 điểm A, B, C, D bằng ∞ (vô cùng).

Như vậy là:

$$[A, B, C, D] = \begin{cases} \dfrac{k_2}{l_2} : \dfrac{k_1}{l_1} & \text{Nếu } l_2 \neq 0 \\ \infty & \text{Nếu } l_2 = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy rằng, định nghĩa của tỉ số kép không phụ thuộc vào việc chọn các vector đại diện cho các điểm.

1.5.2 Tính chất của tỉ số kép

Nếu 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng và phân biệt thì:

a. $[B, A, C, D] = [A, B, D, C] = \dfrac{1}{[A, B, C, D]}$. Có nghĩa là: **Khi hoán vị hai điểm đầu với nhau hoặc hai điểm cuối với nhau thì tỉ số kép trở thành số nghịch đảo.**

Chứng minh không khó khăn, chỉ cần dựa vào định nghĩa.

b. $[B, A, D, C] = [A, B, C, D]$, nghĩa là: **Khi hoán vị đồng thời hai điểm đầu với nhau và hai điểm cuối với nhau, tỉ số kép không thay đổi.** Đó là hệ quả của a.

c. $[C, D, A, B] = [A, B, C, D]$, nghĩa là: **Khi hoán vị cặp điểm đầu và cặp điểm cuối, tỉ số kép không thay đổi.**

Thật vậy, từ các hệ thức:

$$\overrightarrow{c} = k_1\overrightarrow{a} + l_1\overrightarrow{b} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{d} = k_2\overrightarrow{a} + l_2\overrightarrow{b},$$

ta suy ra:

$$(k_1l_2 - k_2l_1)\overrightarrow{a} = l_2\overrightarrow{c} - l_1\overrightarrow{d} \text{ và}$$
$$(k_1l_2 - k_2l_1)\overrightarrow{b} = -k_2\overrightarrow{c} - k_1\overrightarrow{d}.$$

Bởi vậy:

$$[C, D, A, B] = \frac{-k_2}{k_1} : \frac{l_2}{l_1} = \frac{k_2}{l_2} : \frac{k_1}{l_1} = [A, B, C, D].$$

d. $[A, C, B, D] = [D, B, C, A] = 1 - [A, B, C, D]$, có nghĩa là: **Khi hoán vị hai điểm ở giữa với nhau, hoặc hoán vị hai điểm đầu và điểm cuối với nhau thì được tỉ số kép mới bằng 1 trừ đi tỉ số kép cũ.**

Thật vậy, từ các hệ thức:

$$\overrightarrow{c} = k_1\overrightarrow{a} + l_1\overrightarrow{b} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{d} = k_2\overrightarrow{a} + l_2\overrightarrow{b},$$

ta suy ra:

$$l_1\overrightarrow{b} = -k_1\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \quad \text{và} \quad l_1\overrightarrow{d} = (l_1k_2 - l_2k_1)\overrightarrow{a} + l_2\overrightarrow{c}.$$

Bởi vậy:

$$[A, C, B, D] = \frac{l_1k_2 - l_2k_1}{l_2} : \frac{-k_1}{1} = \frac{l_1k_2 - l_2k_1}{-l_2k_1}$$
$$= 1 - \frac{l_1k_2}{l_2k_1} = 1 - [A, B, C, D].$$

e. Thật vậy, từ các hệ thức:

$$\overrightarrow{c} = k_1\overrightarrow{a} + l_1\overrightarrow{b} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{d} = k_2\overrightarrow{a} + l_2\overrightarrow{b},$$

ta suy ra: **Nếu** A, B, C, D, E **là 5 điểm thẳng hàng phân biệt thì:**

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}].[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{E}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}].$$

Hệ thức đó dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

1.5.3 Tỉ số kép tính theo toạ độ các điểm

Giả sử trong $\mathbb{P}^n$ đã chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ cho 4 điểm thẳng hàng A, B, C, D với các ma trận cột toạ độ lần lượt là $(A), (B), (C), (D)$. Như đã biết, khi đó ta có:

$$(C) = k_1(A) + l_1(B) \quad \text{và} \quad (D) = k_2(A) + l_2(B).$$

Đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e}_i\}$ đại diện cho mục tiêu xạ ảnh, các ma trận $(A), (B), (C), (D)$ cũng là các ma trận cột toạ độ của vector $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ lần lượt đại diện cho các điểm A, B, C, D. Bởi vậy ta có: $\overrightarrow{c} = k_1\overrightarrow{a} + l_1\overrightarrow{b}$ và $\overrightarrow{d} = k_2\overrightarrow{a} + l_2\overrightarrow{b}$. Từ đó suy ra:

$$[A, B, C, D] = \frac{k_2}{l_2} : \frac{k_1}{l_1}.$$

Ta giả sử cho:

$$\begin{aligned} A &= (a_0 : a_1 : ... : a_n); \\ B &= (b_0 : b_1 : ... : b_n); \\ C &= (c_0 : c_1 : ... : c_n); \\ D &= (d_0 : d_1 : ... : d_n). \end{aligned}$$

Vì hai điểm A và B không trùng nhau nên ta có thể chọn hai chỉ số i và j sao cho:

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vì

$$(C) = k_1(A) + l_1(B)$$

nên:

$$\begin{aligned} c_i &= a_i k_1 + b_i l_1 \\ c_j &= a_j k_1 + b_j l_1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_i & b_i \\ c_j & b_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}} \qquad l_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_i & c_i \\ a_j & c_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}}$$

Tương tự ta có:

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_i & b_i \\ d_j & b_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}} \qquad l_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_j & d_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}}$$

Cuối cùng ta được công thức:

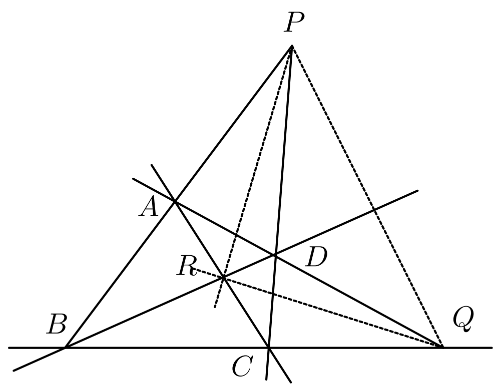
$$[A, B, C, D] = \frac{\begin{vmatrix} a_i & c_i \\ a_j & c_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_j & d_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_i & d_i \\ b_j & d_j \end{vmatrix}}.$$

1.5.4 Hàng điểm điều hoà

Nếu tỉ số kép $[A, B, C, D] = -1$ thì ta nói rằng, *cặp điểm C, D chia điều hoà điểm A, B*. Khi đó vì $[C, D, A, B] = -1$ nên cặp điểm A, B cũng chia điều hoà cặp điểm C, D. Bởi vậy, ta còn nói: *Cặp điểm A, B và cặp điểm C, D liên hiệp điều hoà. Còn nói: A, B, C, D là một hàng điểm điều hoà.*

1.5.5 Hình bốn đỉnh toàn phần

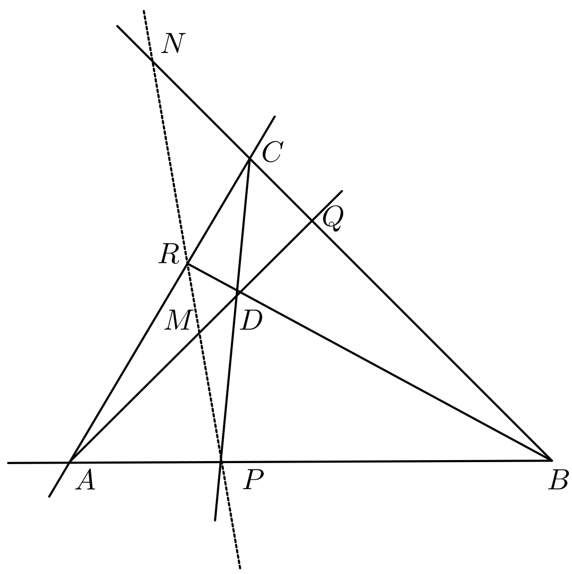
Trong $\mathbb{P}^n$ tập hợp 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trong một mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, được gọi là *hình bốn đỉnh toàn phần.* Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh.* Mỗi đường thẳng đi qua hai đỉnh gọi là *một cạnh* (có 6 cạnh). Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là *hai cạnh đối diện.* Giao điểm của hai cạnh đối diện gọi là *điểm chéo* (có 3 điểm chéo, chúng không thẳng hàng). Đường thẳng đi qua hai điểm chéo gọi là *đường chéo* (có 3 đường chéo chúng không đồng quy).



Trên hình vẽ có các điểm chéo là P, Q, R và các đường chéo là PQ, QR và RP.

Định lý 1.5.1. *Trong một hình bốn đỉnh toàn phần, hai điểm chéo nằm trên một đường chéo chia điều hòa cặp giao điểm của đường chéo đó với cặp cạnh đi qua điểm chéo thứ ba.*

Chứng minh. Giả sử $ABCD$ là hình bốn đỉnh toàn phần. Ba điểm chéo của nó là: $P = AB \cap CD; Q = AD \cap BC$ và $R = AC \cap BD$. Gọi $M = AD \cap PR, N = BC \cap PR$. Ta phải chứng minh: $[P, R, M, N] = -1$.



Trong mặt phẳng $\mathbb{P}^2$ chứa hình bốn đỉnh ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{S_0, S_1, S_2; E\}$ sao cho: $S_0 = A = (1 : 0 : 0), S_1 = B = (0 : 1 : 0), S_2 = C = (0 : 0 : 1), E = D = (1 : 1 : 1)$.

Đường thẳng AB có phương trình $x_2 = 0$, nên điểm P có toạ độ là: $(x_0 : x_1 : 0)$, mặt khác ba điểm P, D, C thẳng hàng nên:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{hay } x_0 = x_1.$$

Vậy $P = (1 : 1 : 0)$.

Tương tự ta tính được: $R = (1 : 0 : 1)$.

Phương trình đường thẳng PR là:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{hay } x_0 - x_1 - x_2 = 0.$$

còn đường thẳng BC có phương trình $x_0 = 0$.

Vậy toạ độ $N = PR \cap BC$ là $N = (0 : 1 : -1)$.

Phương trình đường thẳng AD là:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{hay } x_2 - x_1 = 0.$$

Vậy toạ độ $M = PR \cap AD$ là $M = (2 : 1 : 1)$. Từ đó ta có:

$$(M) = (P) + (R), \text{ và } (N) = (P) - (R)$$

hay $[P, R, M, N] = -1$. □

1.6 Tỉ số kép của chùm bốn siêu phẳng

1.6.1 Chùm siêu phẳng

Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một $(n-2)$ - phẳng được gọi là *chùm siêu phẳng, với giá là $(n-2)$ - phẳng đó.*

Dĩ nhiên một chùm siêu phẳng được xác định khi cho giá của nó, hoặc cho hai siêu phẳng nào đó của chùm.

Giả sử trong $\mathbb{P}^n$ đã chọn mục tiêu xạ ảnh cho một chùm siêu phẳng, mà hai siêu phẳng U và V của nó lần lượt có phương trình:

$$u_0x_0 + u_1x_1 + ... + u_nx_n = 0 \tag{1.5}$$

và

$$v_0x_0 + v_1x_1 + ... + v_nx_n = 0 \tag{1.6}$$

(khi đó giá của chùm sẽ có phương trình là hệ gồm hai phương trình trên). Toạ độ của các siêu phẳng đó là: $U = (u_0 : u_1 : ... : u_n)$ và $V = (v_0 : v_1 : ... : v_n)$. Cũng như đối với toạ độ các điểm, ta kí hiệu (U) và (V) lần lượt là các ma trận cột toạ độ của các siêu phẳng U và V.

Định lý 1.6.1. *Điều kiện cần và đủ để siêu phẳng W thuộc chùm xác định bởi hai siêu phẳng U và V là phương trình W có dạng:*

$$p(u_0x_0 + u_1x_1 + ... + u_nx_n) + q(v_0x_0 + v_1x_1 + ... + v_nv_n) = 0 \quad (1.7)$$

trong đó: p và q không đồng thời bằng 0.

hoặc, nói cách khác là: ma trận cột toạ độ của W có dạng:

$$(W) = p(U) + q(V).$$

Chứng minh. Giả sử siêu phẳng W có phương trình:

$$w_0x_0 + w_1x_1 + ... + w_nx_n = 0 \quad (1.8)$$

Điều kiện cần và đủ để W thuộc chùm xác định bởi U, V là W đi qua $(n-2)$ - phẳng có phương trình là hệ gồm hai phương trình (1.5) và (1.6).Điều đó xảy ra khi và chỉ khi hệ gồm 3 phương trình (1.5),(1.6),(1.8) là phụ thuộc, trong lúc hệ (1.5) và (1.6) là độc lập, hay khi và chỉ khi (1.8) là phương trình hệ quả của (1.5) và (1.6), tức (1.8) có dạng (1.7). □

1.6.2 Tỉ số kép của bốn siêu phẳng thuộc một chùm

Định lý 1.6.2. *Cho bốn siêu phẳng U, V, W, Z thuộc một chùm, trong đó U, V, W đôi một phân biệt. Nếu d là đường thẳng cắt bốn siêu phẳng đó lần lượt tại các điểm A, B, C, D (không cắt giá của chùm) thì tỉ số kép của bốn điểm đó không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

Tỉ số kép nói trên được gọi là *tỉ số kép của chùm bốn siêu phẳng,* kí hiệu $[U, V, W, Z]$.

Chứng minh. Ta chọn mục tiêu xạ ảnh nào đó và giả sử đối với nó, các siêu phẳng đó có ma trận cột toạ độ là $(U), (V)$, là:

$$(W) = p_1(U) + q_1(U);$$
$$(Z) = p_2(U) + q_2(U),$$

còn các điểm A, B, C, D có ma trận cột toạ độ tương ứng là $(A), (B), (C), (D)$.

Vì $A \in U, B \in V$ nên: $(U)^t(A) = 0, (V)^t(B) = 0$, ngoài ra vì A, B phân biệt nên: $(U)^t(B) \neq 0, (V)^t(A) \neq 0$. Vì điểm C nằm trên AB nên $(C) = k_1(A) + l_1(B)$, nó lại nằm trên W nên: $(W)^t(C) = 0$ hay:

$$(p_1(U)^t + q_1(V)^t)(k_1(A) + l_1(B)) = 0$$

Như vậy:

$$p_1k_1(U)^t(A) + q_1l_1(V)^t(B) + p_1l_1(U)^t(B) + q_1k_1(V)^t(A) = 0.$$

hay

$$p_1l_1(U)^t(B) + q_1k_1(V)^t(A) = 0.$$

Ta có thể lấy $k_1 = p_1(U)^t(B)$ và $l_1 = -q_1(V)^t(A)$. Tương tự như thế ta có:

$$(D) = k_2(A) + l_2(B)$$

với:

$$k_2 = p_2(U)^t(B), \qquad l_2 = -q_2(V)^t(A).$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}[A, B, C, D] &= \frac{k_2}{l_2} : \frac{k_1}{l_1} \\ &= \frac{p_2(U)^t(B)}{q_2(V)^t(A)} : \frac{p_1(U)^t(B)}{-q_1(V)^t(A)} \\ &= \frac{p_2}{q_2} : \frac{p_1}{q_1} \qquad \text{không phụ thuộc } d.\end{aligned}$$

□

Chú ý. Từ chứng minh định lý trên ta suy ra cách tìm tỉ số kép của chùm siêu phẳng khi biết toạ độ của chúng đối với một mục tiêu nào đó: Nếu các siêu phẳng U, V, W, Z có ma trận cột toạ độ là $(U), (V), (W) = p_1(U) + q_1(V), (Z) = p_2(U) + q_2(V)$, thì:

$$[U, V, W, Z] = \frac{p_2}{q_2} : \frac{p_1}{q_1}.$$

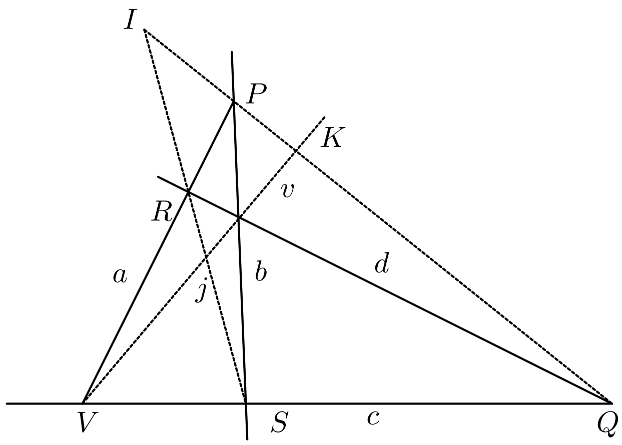
1.6.3 Chùm bốn siêu phẳng điều hoà

Bốn siêu phẳng U, V, W, Z của một chùm được gọi là *chùm bốn siêu phẳng điều hoà* nếu $[U, V, W, Z] = -1$. Khi đó ta còn nói: *Cặp siêu phẳng U, V chia điều hoà cặp siêu phẳng W, Z.*

1.6.4 Hình bốn cạnh toàn phần

Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbb{P}^2$ hình gồm bốn đường thẳng trong đó không có ba đường thẳng nào đồng quy gọi là *hình bốn cạnh toàn phần.* Mỗi đường thẳng đó gọi là *một cạnh* (có 4 cạnh). Giao điểm của hai cạnh gọi là *một đỉnh* (có 6 đỉnh). Hai đỉnh không nằm trên một cạnh gọi là *hai đỉnh đối diện.* Đường thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là *đường chéo* (có 3 đường chéo). Giao của hai đường chéo gọi là *điểm chéo* (có 3 điểm chéo).

Định lý 1.6.3. *Trong hình bốn cạnh toàn phần, hai đường chéo đi qua một điểm chéo nào đó chia điều hòa hai đường thẳng nối hai điểm chéo đó với hai đỉnh nằm trên đường chéo thứ ba.*



Chứng minh. Giả sử a, b, c, d là bốn cạnh của hình bốn cạnh toàn phần. Các đỉnh của nó là:

$$P = a \cap b, \quad Q = c \cap d, \quad R = a \cap d, \quad S = b \cap c, \quad U = a \cap c, \quad V = b \cap d.$$

Các điểm chéo là:

$$I = PQ \cap RS, \quad J = RS \cap UV, \quad K = UV \cap PQ.$$

Ta phải chứng minh rằng cặp đường thẳng IJ, IK chia điều hoà cặp đường thẳng IU, IV. Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh $[J, K, U, V] = -1$. Xét hình bốn đỉnh toàn phần $PQRS$ thì điều hoà đó là hiển nhiên. □

1.7 Nguyên tắc đối ngẫu

1.7.1 Phép đối xạ trong $\mathbb{P}^n$

Ta kí hiệu $\prod^n$ là tập hợp tất cả các phẳng trong $\mathbb{P}^n$ có số chiều bé hơn n. Chọn trong $\mathbb{P}^n$ một mục tiêu xạ ảnh nào đó và xác định ánh xạ $\pi : \prod^n \to \prod^n$ như sau:

*** Nếu A là một điểm** (tức là một 0 - phẳng) thì $\pi(A)$ là siêu phẳng có toạ độ giống như toạ độ của A, cụ thể là nếu:

$$A = (a_0 : a_1 : ... : a_n) \text{ thì: } \pi(A) = (a_0 : a_1 : ... : a_n).$$

Nếu U là cái phẳng nào đó thì:

$$\pi(U) = \bigcap_{X \in U} \pi(X).$$

(Dưới đây ta sẽ chứng minh rằng $p(U)$ là cái phẳng).

1.7.2 Các tính chất của phép đối xạ

a. Phép đối xạ biến mỗi điểm (0 - phẳng) thành một siêu phẳng.

b. Phép đối xạ biến m điểm độc lập thành m siêu phẳng độc lập, biến m điểm không độc lập thành m siêu phẳng không độc lập.

Thật vậy, cho m điểm A_i, $i = 1, 2, ..., m$ với $A_i = (a_{i0} : a_{i1} : ... : a_{in})$, khi đó $\pi(A_i)$ là siêu phẳng có toạ độ bằng toạ độ của A_i. Xét ma trận (a_{ij}), $i = 1, 2, ..., m$; $j = 0, 1, 2, ..., n$. Ta biết rằng, m điểm A_i độc lập khi và chỉ khi ma trận đó có hạng bằng m, tức là khi và chỉ khi m siêu phẳng $\pi(A_i)$ độc lập.

c. Phép đối xạ biến r - phẳng thành $(\mathbf{n - r - 1})$ - phẳng.

Chứng minh. Giả sử cho r - phẳng U, ta lấy trên nó $r + 1$ điểm độc lập $A_0, A_1, ..., a_r$, khi đó, $r+1$ siêu phẳng $\pi(A_0), \pi(A_1), ..., \pi(A_r)$ cũng độc lập (tính chất b), nên giao của chúng là cái phẳng V có số chiều là $n - r - 1$. Ta chứng minh: $v = \pi(U)$.

Trước tiên, theo định nghĩa của $\pi(U)$, ta có ngay $\pi(U) \subset V$. Vậy chỉ còn phải chứng minh $\pi(U) \supset V$.

Ta lấy một điểm $X \in U$, thì $r+2$ điểm $A_0, A_1, ..., a_r, X$ không độc lập, vậy $r+2$ siêu phẳng $\pi(A_0), \pi(A_1), ..., \pi(A_r), \pi(X)$ không độc lập, do đó:

$$\pi(X) \supset V \quad \text{hay} \quad \pi(U) \supset V.$$

□

d. Cho hai phẳng $\mathbf{U}, \mathbf{V}$. Nếu $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ thì $\pi(\mathbf{V}) \subset \pi(\mathbf{U})$.

Thật vậy, theo định nghĩa

$$\pi(U) = \bigcap_{X \in U} \pi(X) \quad \text{và} \quad \pi(V) = \bigcap_{X \in V} \pi(X).$$

bởi vậy, nếu $U \subset V$ thì $\pi(V) \subset \pi(U)$.

1.7.3 Nguyên tắc đối ngẫu

Hai cái phẳng U và V trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ gọi là *quan hệ liên thuộc* nếu một trong hai phẳng đó chứa phẳng kia: tức là $U \subset V$ hoặc $V \subset U$. Khi đó ta nói U thuộc V, hoặc V thuộc U. Chẳng hạn: nếu điểm A nằm trên đường thẳng a thì ta nói: điểm A thuộc đường thẳng a, hoặc nói đường thẳng a thuộc điểm A. Như vậy, từ *"thuộc"* đồng nghĩa với một trong các từ: *"nằm trên", "đi qua", "chứa", "chứa trong"*.

Với cách hiểu như vậy, ta có thể nói rằng: *Phép đối xạ giữ nguyên quan hệ liên thuộc giữa các phẳng, có nghĩa là nếu U thuộc V thì $\pi(U)$ thuộc $\pi(V)$.*

Bây giờ giả sử M là một mệnh đề nào đó trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, nói về các phẳng và các quan hệ liên thuộc giữa chúng. Nếu trong mệnh đề đó các từ *"r - phẳng"* được thay bằng các từ *"$(n-r-1)$ - phẳng"*, các từ khác giữ nguyên thì ta được mệnh đề mới M^*, gọi là *mệnh đề đối ngẫu* của mệnh đề M. Cố nhiên, mệnh đề M là đối ngẫu của mệnh đề M^*, bởi vậy ta nói M và M^* là *cặp mệnh đề đối ngẫu với nhau.*

Từ tính chất của phép đối xạ, ta có kết quả sau đây gọi là *nguyên tắc đối ngẫu:*

"Trong không gian xạ ảnh cặp mệnh đề đối ngẫu với nhau hoặc cùng đúng, hoặc cùng sai".

Để làm ví dụ, ta hãy xét mệnh đề sau trong $\mathbb{P}^n$: *"Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước".* Ta phát biểu lại dưới dạng: *"Có một và chỉ một - phẳng thuộc hai điểm phân biệt cho trước".* Khi đó, mệnh đề đối ngẫu của nó sẽ là: *"Có một và chỉ một $(n-2)$ - phẳng thuộc hai siêu phẳng phân biệt cho trước",* hay phát biểu cách khác: *"Hai siêu phẳng phân biệt luôn cắt nhau theo một $(n-2)$ - phẳng duy nhất".*

Cặp mệnh đề đối ngẫu trên đây đều đúng.

Ta lưu ý đến cách thành lập mệnh đề đối ngẫu trong $\mathbb{P}^2$ và $\mathbb{P}^3$:

Trong $\mathbf{P^2}$, để có mệnh đề đối ngẫu của mệnh đề M ta thay trong M các từ *"điểm"* bởi các từ *"đường thẳng"* và ngược lại, còn các từ khác giữ nguyên.

Trong $\mathbf{P^3}$, để có mệnh đề đối ngẫu của mệnh đề M ta thay trong M các từ *"điểm"* bởi các từ *"mặt phẳng"* và ngược lại, còn các từ khác giữ nguyên.

1.7.4 Khái niệm đối ngẫu

Một khái niệm cũng có khái niệm đối ngẫu nếu trong định nghĩa của nó, ta thay từ *r - phẳng* bởi từ *$(n-r-1)$ - phẳng.*

Ví dụ 1.7.1. *a. Khái niệm r điểm độc lập trong $\mathbb{P}^n$, được định nghĩa là "r - điểm không cùng thuộc một $(r-2)$ - phẳng" có khái niệm đối ngẫu là: r siêu phẳng không cùng thuộc một $(n-r+1)$ - phẳng". Đó chính là khái niệm r siêu phẳng độc lập.*

b. Trong $\mathbb{P}^2$ hình bốn đỉnh toàn phần và hình bốn cạnh toàn phần là cặp khái niệm đối ngẫu.

c. Trong $\mathbb{P}^n$, khái niệm chùm siêu phẳng (tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một $(n-2)$ - phẳng) có khái niệm đối ngẫu là: Tập hợp các điểm cùng thuộc một đường thẳng, ta gọi chúng là một hàng điểm.

d. Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng, có tỉ số kép $[A, B, C, D] = k$. Qua phép đối xạ, các siêu phẳng $\pi(A)$, $\pi(B)$, $\pi(C)$, $\pi(D)$ thuộc một chùm và từ định nghĩa tỉ số kép của hàng 4 điểm và chùm 4 siêu phẳng ta suy ra: $[A, B, C, D] = [\pi(A),\ \pi(B),\ \pi(C),\ \pi(D)]$. Bởi vậy ta nói rằng: khái niệm tỉ số kép của hàng 4 điểm và tỉ số kép của chùm 4 siêu phẳng là khái niệm đối ngẫu.

e. Khái niệm hàng điểm điều hoà và chùm siêu phẳng điều hoà là cặp khái niệm đối ngẫu.

1.8 Mô hình xạ ảnh của không gian afin

1.8.1 Xây dựng mô hình

Giả sử $\mathbb{P}^n$ là $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh liên liết với $\mathbb{K}$ - không gian vector $\mathbb{V}^{n+1}$. Gọi $\mathbb{W}$ là một siêu phẳng nào đó của $\mathbb{P}^n$. Đặt $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \backslash \mathbb{W}$. Ta xây dựng $\mathbb{A}^n$ thành không gian afin bằng cách sau đây:

Đưa vào $\mathbb{P}^n$ một mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ với các đỉnh $S_1, S_2, ..., S_n$ nằm trên W. Khi đó, siêu phẳng $\mathbb{W}$ sẽ có phương trình $x_0 = 0$.

Nếu điểm $X \in \mathbb{A}^n$ thì X có toạ độ $(x_0 : x_1 : x_2 : ... : x_n)$ trong đó $x_0 \neq 0$ (vì X không thuộc W). Bởi vậy, nếu ta đặt $X_i = \dfrac{x_i}{x_0}$, với $i = 1, 2, ..., n$ thì ta được một bộ thứ tự gồm n số $(X_1, X_2, ..., X_n)$, với $X_i \in \mathbb{K}$. Nó được gọi là *toạ độ không thuần nhất* của điểm X, và viết $X = (X_1, X_2, .., X_n)$. Rõ ràng là có một song ánh từ tập $\mathbb{A}^n$ tới tập $\mathbb{K}^n$ bằng cách cho mỗi điểm tương ứng với toạ độ không thuần nhất của nó.

Nếu có hai điểm của $\mathbb{A}^n$ là $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ và $Y = Y_1, Y_2, ..., Y_n$ thì ta kí hiệu $\overrightarrow{XY}$ là vector $(Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, ..., Y_n - X_n)$ của $\mathbb{K}^n$ (xem $\mathbb{K}^n$ là không gian vector trên trường $\mathbb{K}$). Bằng cách đó ta có ánh xạ $\varphi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{K}^n$, thoả mãn các tiên đề của không gian afin và do đó $\mathbb{A}^n$ trở thành không gian afin n chiều liên kết với không gian vector $\mathbb{K}^n$.

1.8.2 Mục tiêu afin trong mô hình

Xét mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ trong $\mathbb{P}^n$ như trên. Gọi E_i là giao điểm của đường thẳng $\langle S_i, E\rangle$ và siêu phẳng đi qua E và qua mọi đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh S_i, thì dễ thấy toạ độ không thuần nhất của các điểm đó là:

$$E_1 = (1, 0, 0, ..., 0).$$

$$E_2 = (0, 1, 0, ..., 0).$$

....

$$E_n = (0, 0, 0..., 1).$$

Ngoài ra, hiển nhiên $S_0 = (0, 0, 0, ..., 0)$. Bởi vậy, nếu ta đặt $\overrightarrow{S_0E_i} = \overrightarrow{e}_i$ thì ta được mục tiêu afin $(S_0, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n)$, viết tắt là $(S_0; \overrightarrow{e}_i)$, và gọi là *mục tiêu afin sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh* (S_i, E) .

Nếu điểm X có toạ độ không thuần nhất:

$$X = (X_1, X_2, ..., x_n)$$

thì

$$\overrightarrow{S_0X} = X_1\overrightarrow{e}_1 + X_2\overrightarrow{e}_2 + ... + X_n\overrightarrow{e}_n.$$

nên $(X_1, X_2, ..., X_n)$ chính là toạ độ afin của X đối với mục tiêu afin $(S_0; \overrightarrow{e}_i)$.

1.8.3 Các phẳng trong mô hình

Ta chứng minh rằng: **Nếu m - phẳng xạ ảnh U của $\mathbb{P}^n$ không nằm trên siêu phẳng W thì tập $U' = U \backslash W$ là một m - phẳng afin trong không gian afin $\mathbb{A}^n$.**

Thật vậy, giả sử m - phẳng U có phương trình đối với mục tiêu (S_i, E) là:

$$\sum_{j=0}^{n} u_{ij}x_j = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n - m.$$

trong đó ma trận (u_{ij}) $i = 1, 2, ..., n - m;$ $j = 0, 1, ..., n$ có hạng bằng $n - m$.

Vì U không nằm trên siêu phẳng W, thì khi thêm vào hệ phương trình trên một phương trình thứ $n-m+1$ là $x_0 = 0$ (hệ phương trình của W) ta được hệ $n-m+1$ phương trình mà ma trận các hệ số có hạng bằng $n - m + 1$. Từ đó, suy ra ma trận (u_{ij}) $i = 1, 2, ..., n - m;$ $j = 0, 1, ..., n$ có hạng bằng $n - m$.

Bây giờ, nếu đặt $U' = U\backslash W$ thì mỗi điểm $X \in U'$ có toạ độ $X = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ thoả mãn hệ $n - m$ phương trình trên, đồng thời $x_0 \neq 0$. Từ đó, suy ra toạ độ afin $(X_1, X_2, ..., X_n)$ của X thoả mãn hệ phương trình:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij}X_j + u_{i0} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n - m.$$

trong đó, ma trận các hệ số có hạng bằng $n - m$. Điều đó chứng tỏ rằng, $U' = U\backslash W$ là một m - phẳng afin của không gian afin $\mathbb{A}^n$.

1.8.4 Thể hiện sự song song của các phẳng trong mô hình

Cho r - phẳng xạ ảnh U và s - phẳng xạ ảnh V trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, không nằm trên siêu phẳng W, với $r \leqslant s$. Ta biết rằng khi đó $U \cap W$ và $V \cap W$ là các phẳng xạ ảnh có số chiều lần lượt là $r - 1$ và $s - 1$.

Ta chứng minh rằng: Nếu $U \cap W \subset V \cap W$ thì r - phẳng afin $U' = U \backslash W$ song song với s - phẳng afin $V' = V \backslash W$.

Thật vậy, giả sử r - phẳng U có phương trình:

$$\sum_{j=0}^{n} u_{ij} x_j = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n - r.$$

Giao $U \cap W$ có phương trình:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j & = 0, \ i = 1, 2..., n - r. \\ x_0 & = 0. \end{cases}$$

Vì U không nằm trên W nên ma trận (u_{ij}) $i = 1, 2, ..., n - r$; $j = 1, 2, ..., n$ có hạng bằng $n - r$.

Tương tự, nếu s - phẳng V có phương trình:

$$\sum_{j=0}^{n} v_{ij} x_j = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n - s.$$

Thì giao $V \cap W$ có phương trình:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j & = 0, \ i = 1, 2..., n - s. \\ x_0 & = 0. \end{cases}$$

Trong đó ma trận (v_{ij}) $i = 1, 2, ..., n - s$; $j = 1, 2, ..., n$ có hạng bằng $n - s$.

Phương trình của r - phẳng afin $U' = U \backslash W$ đối với mục tiêu afin sinh bởi mục tiêu xạ ảnh là:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} X_i + u_{i0} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n - r.$$

còn phương trình của V' là:

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} X_i + v_{i0} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n - s.$$

Từ điều kiện $U \cap W \subset V \cap W$ ta suy ra hệ phương trình của $V \cap W$ là hệ quả của phương trình của $U \cap W$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{U}' \subset \overrightarrow{V}'$, hay U' song song với V'.

Ví dụ 1.8.1. *Nếu gọi a và b là hai đường thẳng trong $\mathbb{P}^n$, không nằm trên W, và cắt nhau tại một điểm M thuộc W thì khi bỏ đi điểm M ta còn lại hai đường thẳng afin a' và b' song song. Vì lẽ đó, điểm M tuy không thuộc đường thẳng afin a và b, ta vẫn gọi nó là "điểm vô tận" của a và của b. Và như vậy, hai đường thẳng là song song khi chúng có chung điểm vô tận. Nếu điểm M vô tận có toạ độ xạ ảnh $M = (0 : m_1 : m_2 : ... : m_n)$ thì các đường thẳng afin đi qua M có cùng vector chỉ phương là $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, ..., m_n)$. Như vậy, có thể nói mỗi điểm vô tận xác định ra một phương của các đường thẳng song song.*

Siêu phẳng xạ ảnh W được gọi là "siêu phẳng vô tận" của không gian afin. Mỗi m - phẳng xạ ảnh nằm trên W cũng gọi là "m - phẳng vô tận".

1.8.5 Ý nghĩa afin của tỉ số kép và ý nghĩa xạ ảnh của tỉ số đơn

Trên mô hình $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \backslash W$ của không gian afin cho bốn điểm thẳng hàng và phân biệt A, B, C, D. Đối với mục tiêu xạ ảnh đã chọn (khi xây dựng mô hình), giả sử toạ độ của A và B là: $A = (1 : a_1 : a_2 : ... : a_n),\ B = (1 : b_1 : b_2 : ... : b_n)$.Khi đó, toạ độ của C và D là:

$$C = (k_1 + l_1 : k_1a_1 + l_1b_1 : k_1a_2 + l_1b_2 : ... : k_1a_n + l_1b_n).$$
$$D = (k_2 + l_2 : k_2a_1 + l_2b_1 : k_2a_2 + l_2b_2 : ... : k_2a_n + l_2b_n).$$

Theo định nghĩa của tỉ số kép trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ ta có:

$$[A, B, C, D] = \frac{k_2}{l_2} : \frac{k_1}{l_1}.$$

Bây giờ ta hãy tìm tọa độ afin của các điểm A, B, C, D đối với mục tiêu afin sinh bởi mục tiêu xạ ảnh nói trên. Dễ dàng thấy:

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n), \quad B = (b_1, b_2, ..., b_n),$$
$$C = (c_1, c_2, ..., c_n), \quad D = (d_1, d_2, ..., d_n).$$

trong đó:

$$c_i = \frac{k_1a_i + l_1b_i}{k_1 + l_1};\ d_i = \frac{k_2a_i + l_2a_i}{k_2 + l_2}; \quad \text{với } i = 1, 2, ..., n.$$

từ đó ta có:

$$a_i - c_i = a_i - \frac{k_1a_i + l_1b_i}{k_1 + l_1} = \frac{l_1(a_i - b_i)}{k_1 + l_1},$$
$$b_i - c_i = b_i - \frac{k_1a_i + l_1b_i}{k_1 + l_1} = \frac{-k_1(a_i - b_i)}{k_1 + l_1}.$$

Theo định nghĩa tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng trong không gian afin, ta có:

$$(A, B, C) = -\frac{l_1}{k_1}.$$

Tương tự ta có: $(A, B, D) = -\dfrac{l_2}{k_2}$.

Vì vậy, $[A, B, C, D] = (A, B, C) : (A, B, D)$.

Như vậy, trong không gian afin có thể định nghĩa tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D là *tỉ số của hai tỉ số đơn* (A, B, C) *và* (A, B, D).

Đặc biệt, nếu ta lấy bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D trong đó D nằm trên W (nói cách khác D là điểm vô tận của đường thẳng đi qua A, B, C) thì $k_2 + l_2 = 0$, nên:

$$[A, B, C, D] = -\frac{l_1}{k_1} = (A, B, C).$$

Bởi vậy, ta có thể nói: **Tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ là tỉ số kép của ba điểm đó và điểm vô tận của đường thẳng đi qua chúng.**

Nếu tỉ số đơn đó bằng -1, tức là khi B là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có thể nói: **Trung điểm của đoạn AB là điểm cùng với điểm vô tận của đường thẳng AB chia điều hoà cặp điểm $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.**

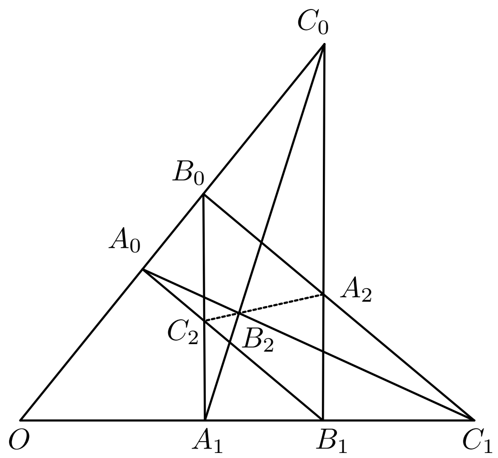
1.8.6 Áp dụng

Sau khi đã bỏ đi một siêu phẳng W nào đó của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ ta được không gian afin $\mathbb{A}^n$. Khi đó, một sự kiện hình học nào đó trong $\mathbb{P}^n$ sẽ trở thành một sự kiện trong $\mathbb{A}^n$.

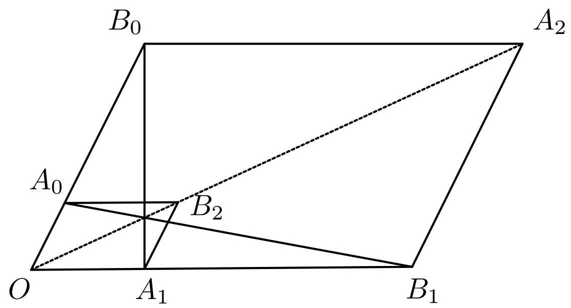
Bằng cách đó, từ một định lý của hình học xạ ảnh ta có thể suy ra một số định lí của hình học afin.

Để minh hoạ, ta xét định lí Papuýt trong $\mathbb{P}^2$:

"Trong $\mathbb{P}^2$ cho sáu điểm phân biệt $\mathbf{A_0}, \mathbf{B_0}, \mathbf{C_0}, \mathbf{A_1}, \mathbf{B_1}, \mathbf{C_1}$, trong đó $\mathbf{A_0}, \mathbf{B_0}, \mathbf{C_0}$ thẳng hàng và $\mathbf{A_1}, \mathbf{B_1}, \mathbf{C_1}$ thẳng hàng. Khi đó ba giao điểm $\mathbf{A_2} = \mathbf{B_0C_1} \cap \mathbf{B_1C_0}, \mathbf{B_2} = \mathbf{C_0} \cap \mathbf{C_1A_0}$, $\mathbf{C_2} = \mathbf{A_0B_1} \cap \mathbf{A_1B_0}$ cũng thẳng hàng".

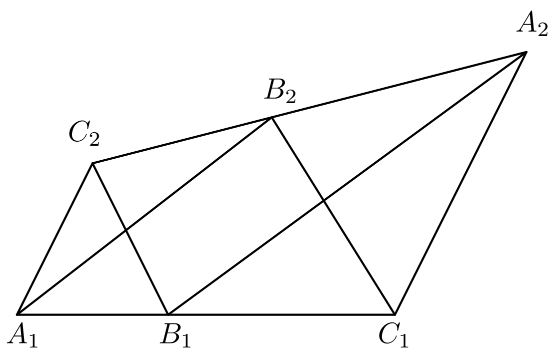


a. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng A_0B_0 và A_1B_1. Chọn đường thẳng đi qua điểm C_0, C_1 làm đường thẳng vô tận W, và xét mặt phẳng afin $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \backslash W$. Khi đó, các hình bốn đỉnh $OA_0B_2A_1$ và $OB_0A_2B_1$ trở nên những hình bình hành do có những cạnh đối song song. Vậy ta có định lý sau đây trong mặt phẳng afin:



"Cho hai hình bình hành $\mathbf{OA_0B_2A_1}$ và $\mathbf{OB_0A_2B_1}$, trong đó $\mathbf{O, A_0, B_0}$ thẳng hàng, $\mathbf{O, A_1, B_1}$ thẳng hàng. Khi đó ba điểm $\mathbf{A_2, B_2, C_2 = A_0B_0 \cap A_1B_0}$ thẳng hàng".

b. Chọn đường thẳng đi qua A_0, B_0, C_0 là đường thẳng vô tận W, ta có định lý sau trên mặt phẳng afin:



"Cho ba điểm $\mathbf{A_1, B_1, C_1}$ thẳng hàng, gọi $\mathbf{A_2, B_2, C_2}$ là những điểm sao cho $\mathbf{A_1C_2 // C_1A_2, A_1B_2 // B_1A_2, B_1C_2 // C_1B_2}$. Khi đó, ba điểm $\mathbf{A_2, B_2, C_2}$ thẳng hàng".

Ta chú ý rằng, nếu định lý (a) hoặc (b) đã được chứng minh (bằng kiến thức của hình học afin) thì định lý Papuýt cũng được chứng minh. Điều đó có nghĩa là: Từ một định lý của hình học afin ta cũng suy ra được một định lý của hình học xạ ảnh.

Để làm ví dụ, ta xét định lý sau đây trong mặt phẳng afin: **"Ba trung tuyến trong tam giác đồng quy".**

Giả sử AA', BB', CC' là các đường trung tuyến của tam giác ABC. Nếu gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm vô tận của các đường thẳng BC, CA, AB thì $[B, C, A', A_1] = [C, A, B', B_1] = [A, B, C', C_1] = -1$. Nhưng trong mặt phẳng xạ ảnh điểm vô tận bình đẳng như những điểm khác. Bởi vậy, ta có định lý xạ ảnh sau đây:

"Cho ba điểm không thẳng hàng $\mathbf{A, B, C}$ và một đường thẳng d không đi qua chúng, cắt các đường thẳng $\mathbf{Bc, CA, AB}$ lần lượt tại $\mathbf{A_1, B_1, C_1}$. Gọi $\mathbf{A', B', C'}$ là các điểm sao cho: $\mathbf{[B, C, A', A_1] = [C, A, B', B_1] = [A, B, C', C_1] = -1}$. Khi đó, ba đường thẳng $\mathbf{AA', BB', CC'}$ đồng quy".

Chú ý rằng, định lý đó là một trường hợp của định lý Xêva.

1.9 Các phần tử ảo trong không gian xạ ảnh thực

1.9.1 Các phần tử ảo trong không gian xạ ảnh phức

Ta hãy xét $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ một không gian xạ ảnh n chiều trong trường số phức $\mathbb{C}$. Gọi $\{S_i; E\}$ là một mục tiêu xạ ảnh cố định của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Định nghĩa 1.9.1. *Điểm X được gọi là điểm thực của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nếu nó có một toạ độ gồm bộ $n+1$ số thực. Điểm X gọi là điểm ảo nếu nó không phải là điểm thực.*

Một m - phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gọi là m - phẳng thực nếu nó có phương trình mà hệ số là những số thực. Một m - phẳng gọi là ảo nếu nó không thực.

Ví dụ 1.9.1. *Các đỉnh S_i và điểm E của mục tiêu là các điểm thực. Điểm $(i : -2i : 3i)$ trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ là điểm thực (ở đây i kí hiệu cho đơn vị ảo: $i^2 = -1$) vì có thể lấy toạ độ của nó là $(1 : -2 : 3)$. Điểm $(1 : i : 0)$ là điểm ảo.*

Trong $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ đường thẳng có phương trình:

$$(1-i)x_0 + (2+i)x_1 - (2-i)x_2 - (1-i)x_3 = 0.$$
$$(1+2i)x_0 + 2(1-i)x_1 - 2(1+i)x_2 - (1-2i)x_3 = 0.$$

là đường thẳng thực, vì dễ thấy hệ phương trình trên tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_0 + 2x_1 - 2x_2 - x_3 & = 0. \\ -x_0 + x_1 + x_2 - x_3 & = 0. \end{cases}$$

Còn đường thẳng có phương trình:

$$x_0 + ix_1 = 0,\ x_0 + x_1 = 0 \text{ là đường thẳng ảo.}$$

Chú ý rằng, định nghĩa trên phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu. Nếu thay đổi mục tiêu thì một điểm thực có thể trở thành điểm ảo và ngược lại.

Cũng chú ý rằng, trên các m - phẳng thực những điểm ảo và trên các m - phẳng ảo cũng có thể có các điểm thực.

1.9.2 Các phần tử liên hợp trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Với mỗi số phức $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta kí hiệu số phức liên hợp của nó là $\overline{z} = a - ib$.

Hai điểm X và X' của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gọi là *liên hợp với nhau* nếu chúng có các toạ độ tương ứng liên hợp với nhau. Hiển nhiên, mỗi điểm thực đều liên hợp với chính nó.

Hai m - phẳng của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gọi là *liên hợp với nhau* nếu chúng có hai phương trình có các hệ số tương ứng liên hợp với nhau.

Định lý 1.9.2. *Nếu m - phẳng U đi qua $m+1$ điểm độc lập của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, trong đó các điểm hoặc là thực, hoặc đôi một liên hợp với nhau thì U là m - phẳng thực.*

Chứng minh. Giả sử m - phẳng U đi qua $m+1$ điểm độc lập $M_0, M_1, ..., M_m$. Nếu trong đó có hai điểm liên hợp là M_i và M_j thì ta thay chúng bởi hai điểm M_i' và M_j' có toạ độ:

$(M_i') = (M_i) + (M_j)$ và $(M_j') = (M_i) - (M_j)$. Khi đó hiển nhiên M_i và M_j là những điểm thực nằm trên đường thẳng M_iM_j. Còn nếu M_k là điểm thực thì ta kí hiệu nó là M_k'. Như vậy ta được $m+1$ điểm thực $M_0', M_1', ..., M_m'$. Chúng độc lập vì nếu không thì ta sẽ có $(m-1)$ - phẳng đi qua chúng và do đó đi qua $m+1$ điểm M_i, tức $m+1$ điểm M_i không độc lập.

Vì m - phẳng U đi qua $m+1$ điểm thực M_i' nên U là m - phẳng thực.

Trường hợp riêng: *Đường thẳng đi qua hai điểm thực hoặc hai điểm ảo liên hợp là đường thẳng thực.* □

Chứng minh tương tự, ta có kết quả sau:

Định lý 1.9.3. *Nếu m - phẳng U là giao của $n-m$ siêu phẳng, trong đó các siêu phẳng hoặc là thực hoặc là đôi một ảo liên hợp, thì U là m - phẳng thực.*

Trường hợp riêng: *Giao của hai siêu phẳng ảo liên hợp là một $(n-2)$ - phẳng thực.*

1.9.3 Quan hệ giữa không gian xạ ảnh thực và phức n chiều.

Định lý 1.9.4. *Tập hợp tất cả các điểm thực của không gian $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một không gian xạ ảnh thực n chiều, mà các m - phẳng của nó là tập hợp các điểm thực nằm trong một m - phẳng thực của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.*

Chứng minh. Kí hiệu $\prod^n$ là tập hợp các điểm thực của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Gọi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ là không gian xạ ảnh thực n chiều với một mục tiêu xạ ảnh đã chọn, ta xây dựng một đơn ánh:

$$q : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ như sau:}$$

Nếu điểm $X \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ có toạ độ như thế nào thì điểm $q(X) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ cũng có toạ độ như thế. Rõ ràng là khi đó $q(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \prod^n$ và $q|P^n(R) : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \prod^n$ là song ánh.

Mỗi m - phẳng U của $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ có phương trình như thế nào thì $q(U)$ là tập hợp các điểm thực của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ trong m - phẳng thực có phương trình đúng như thế trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Bởi thế ta có thể đồng nhất $\prod^n$ với $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ và do đó $\prod^n$ là không gian xạ ảnh như đã nói trong định lý. Mục tiêu trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ cũng chính là mục tiêu đã chọn trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. □

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài tập 1.1. *Chứng minh rằng trong không gian xạ ảnh* $\mathbb{P}^2$:

a. *Qua hai điểm phân biệt có một và chỉ một đường thẳng.*

b. *Hai đường thẳng phân biệt có duy nhất một điểm chung.*

Bài tập 1.2. *Chứng minh rằng trong không gian xạ ảnh* $\mathbb{P}^3$:

a. *Có những cặp đường thẳng không có điểm chung (ta gọi chúng là chéo nhau).*

b. *Một đường thẳng và một mặt phẳng luôn có điểm chung..*

Bài tập 1.3. *Chứng minh các mệnh đề sau đây trong không gian* $\mathbb{P}^n$:

a. *Giao (theo nghĩa tập hợp) của hai phẳng nếu không rỗng là phẳng nào đó.*

b. p *- phẳng và* $(n-p)$ *- phẳng luôn luôn có điểm chung.*

c. *Giao của một siêu phẳng và một* m *- phẳng không nằm trên siêu phẳng đó là một* $(m-1)$ *- phẳng.*

Bài tập 1.4. *Cho* U, V *là các phẳng trong* $\mathbb{P}^n$. *Ta gọi cái phẳng bé nhất chứa* U *và* V *là tổng của* U *và* $\mathbb{V}$, *và kí hiệu là* $U+V$. *Chứng minh rằng:*

a. $U+V$ *là giao của tất cả các phẳng chứa cả* U *và* $\mathbb{V}$.

b. $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$, *nếu* $U \cap V \neq \varnothing$.

$\dim(U+V) = \dim U + \dim V + 1$, *nếu* $U \cap V = \varnothing$.

Bài tập 1.5. *Trong* m *- phẳng, hệ điểm độc lập có thể có nhiều nhất là bao nhiêu điểm?*

Bài tập 1.6. *Tổng của* r *điểm (mỗi điểm xem là một* 0 *- phẳng) là cái phẳng có số chiều lớn nhất là bao nhiêu? Bé nhất là bao nhiêu?*

Bài tập 1.7. *Hệ* $k+1$ *điểm* $(k \geqslant 2)$ *của* $\mathbb{P}^n$ *gọi là hệ điểm phụ thuộc ở vị trí tổng quát nếu hệ đó không độc lập, nhưng mọi hệ con thực sự của nó đều độc lập.*

Giả sử $S_0, S_1, ..., S_k$ *là hệ điểm phụ thuộc ở vị trí tổng quát. Chứng minh rằng nếu* $1 \geqslant p \geqslant k-2$ *thì giao của* $\langle S_0, S_1, .., S_p\rangle$ *với* $\langle S_{p+1}, S_{p+2}, ..., S_k\rangle$ *là một điểm* P, *và hệ* $S_{p+1}, S_{p+2}, ..., S_k, P$ *là hệ phụ thuộc ở vị trí tổng quát.*

Bài tập 1.8. *Trong* $\mathbb{P}^n$ *cho hệ điểm độc lập* $S_0, S_1, ..., S_k$. *Chứng minh rằng, phẳng* $\langle S_0, S_1, .., S_p\rangle$ *và phẳng* $\langle S_{p+1}, S_{p+2}, ..., S_k\rangle$ *không có điểm chung.*

Bài tập 1.9. *Trong phẳng* $\mathbb{P}^2$ *cho bốn điểm* A, B, C, D *trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Trên các đường thẳng* AB, BC, CD, DA *lần lượt lấy các điểm* M, N, P, Q *sao cho chúng đều không trùng với 4 điểm đã cho. Chứng minh rằng, nếu ba đường thẳng* MN, AC, PQ *đồng quy thì ba đường thẳng* MQ, BD, NP *cũng đồng quy và ngược lại.*

Bài tập 1.10. *Gọi S^n là siêu cầu thực trong không gian Ơclit $\mathbb{E}^{n+1}$. $\{S^n\}$ là tập các cặp điểm xuyên tâm đối của S^n.*

a. *Chứng tỏ rằng, $\{S^n\}$ có thể xem là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều liên kết với $\overrightarrow{\mathbb{E}}^{n+1}$.*

b. *Trong mô hình trên, các m - phẳng của $\{S^n\}$ là những tập hợp nào?*

Bài tập 1.11. *Gọi S^{n+1} là siêu cầu thực trong không gian Ơclit n chiều $\mathbb{E}^n$, $[S^{n+1}]$ là tập hợp tất cả những điểm nằm trong và trên S^{n+1}.*

a. *Hãy làm cho $[S^{n+1}]$ trở thành không gian xạ ảnh n chiều.*

b. *Trong không gian xạ ảnh đó các m - phẳng là những tập nào?*

Bài tập 1.12. *Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau ở G.*

Ta gọi A, B, C, D, E, F, G là những điểm, các đường thẳng là những tập hợp $\{A, B, F\}$, $\{B, C, D\}$, $\{C, E, A\}$, $\{A, D, G\}$, $\{B, E, G\}$, $\{C, F, G\}$; $\{D, E, F\}$ (có tất cả 7 điểm và 7 đường thẳng). Chứng tỏ rằng, đó là một mô hình của mặt phẳng xạ ảnh trên trường $\mathbb{K}$ có đặc số 2.

Bài tập 1.13. *Ta lấy 13 điểm P_i, với $i = 0, 1, 2..., 12, 13$ trên đường thẳng $p_i, i = 0, 1, 2, ..., 12$. Ta gọi điểm P_i là nằm trên đường thẳng P_j nếu $i + j = 0, 1, 3, 9$ (mod 13). Chứng tỏ rằng đó là mô hình của mặt phẳng xạ ảnh trên trường $\mathbb{K}$ có đặc số 3. Hãy tìm 4 điểm nằm trên mỗi đường thẳng và tìm 4 đường thẳng đi qua một điểm.*

Bài tập 1.14. *Cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Tìm điều kiện để điểm $X = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ nằm trên m - phẳng toạ độ $\langle S_0, S_1, ..., S_m\rangle$.*

Bài tập 1.15. *Trong $\mathbb{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn, cho r điểm $A_1, A_2, ..., A_r$ biết toạ độ của chúng là $A_i = (a_{i0} : a_{i1} : ... : a_{in})$, $i = 1, 2, ..., r$. Tìm điều kiện để r điểm đó độc lập.*

Bài tập 1.16. *Trong $\mathbb{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn, cho các điểm $A = (a_0 : a_1 : a_2)$, $B = (b_0 : b_1 : b_2)$, $C = (c_0 : c_1 : c_2)$. Chứng minh rằng, A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi:*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bài tập 1.17. *Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^2$ cho mục tiêu $\{S_0, S_1, S_2; E\}$.*
Gọi: $E_0 = S_0E \cap S_1S_2; E_1 = S_1E \cap S_0S_2; E_2 = S_2E \cap S_0S_1; E'_0 = E_1E_2 \cap S_1S_2; E'_1 = E_0E_2 \cap S_0S_2; E'_2 = E_0E_1 \cap S_0S_1$. Tìm toạ độ của các điểm $E_0, E_1, E_2, E'_0, E'_1, E'_2$.

Bài tập 1.18. *Trong không gian xạ ảnh* $\mathbb{P}^n$ *xét mục tiêu xạ ảnh* $\{S_i; E\}$. *Gọi* E_k *là giao điểm của đường thẳng* S_kE *và siêu phẳng đi qua các đỉnh của mục tiêu, trừ đỉnh* S_k. *Hãy tìm toạ độ của điểm* E_k.

Bài tập 1.19. *Viết công thức đổi toạ độ trong* $\mathbb{P}^2$ *trong các trường hợp sau đây:*

a. *Từ mục tiêu* $\{S_0, S_1, S_2; E\}$ *sang mục tiêu* $\{S_2, S_0, S_1; E\}$

b. *Từ mục tiêu* $\{S_0, S_1, S_2; E\}$ *sang mục tiêu* $\{S_0, S_1, S_2; E'\}$ *biết toạ độ điểm* E' *đối với mục tiêu thứ nhất là* $E' = (a_0 : a_1 : a_2)$.

c. *Từ mục tiêu* $\{S_0, S_1, S_2; E\}$ *sang mục tiêu* $\{E, S_0, S_1, S_2\}$.

Bài tập 1.20. *Trong* $\mathbb{P}^3$ *cho mục tiêu xạ ảnh* $\{S_0, S_1, S_2, S_3; E\}$ *cho các điểm:*

$$S_0' = (1 : -1 : 0 : 0);$$
$$S_1' = (0 : 1 : 1 : 1);$$
$$S_2' = (0 : 0 : 1 : -1);$$
$$S_3' = (1 : 0 : 0 : -1).$$

Chứng minh rằng, $\{S_0', S_1', S_2', S_3'; E\}$ *là một mục tiêu xạ ảnh. Tìm ma trận chuyển từ mục tiêu thứ nhất sang mục tiêu thứ hai.*

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian xạ ảnh với mục tiêu cho trước.

Bài tập 1.21. *Trong* $\mathbb{P}^2$, *chứng minh rằng:*

a. *Ba điểm thẳng hàng khi và chỉ khi ma trận gồm ba cột toạ độ của chúng có định thức bằng 0.*

b. *Ba đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi ma trận gồm ba cột toạ độ của chúng có định thức bằng 0.*

c. *Nếu cho hai điểm:*

$A = (a_0 : a_1 : a_2)$ *và* $B = (b_0 : b_1 : b_2)$ *thì đường thẳng* $\langle A, B\rangle$ *có toạ độ* $(u_0 : u_1 : u_2)$, *trong đó:*

$$u_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \qquad u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} \qquad u_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

d. *Nếu cho hai đường thẳng:*

$p = (p_0 : p_1 : p_2)$ *và* $q = (q_0 : q_1 : q_2)$ *thì giao điểm của chúng có toạ độ là:*

$$\left(\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_2 & p_0 \\ q_2 & q_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} \right)$$

Bài tập 1.22. *Trong* $\mathbb{P}^n$ *cho* n *điểm độc lập* $A_i = (a_{i0} : a_{i1} : ...a_{in}),\ i = 1, 2, ..., n$. *Chứng minh rằng, phương trình tổng quát của siêu phẳng đi qua* A_i *có thể viết dưới dạng:*

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Bài tập 1.23. *Chứng minh định lý Papuýt (Pappus) trong* $\mathbb{P}^2$: *Cho 6 điểm phân biệt và không thẳng hàng* $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$, *trong đó,* A_0, B_0, C_0 *thẳng hàng và* A_1, B_1, C_1 *thẳng hàng. Gọi :*

$$A_2 = B_0C_1 \cap B_1C_0;$$
$$B_2 = A_0C_1 \cap A_1C_0;$$
$$C_2 = A_0B_1 \cap A_1B_0.$$

Chứng minh rằng, ba điểm A_2, B_2, C_2 *thẳng hàng.*

Bài tập 1.24. *Trong* $\mathbb{P}^2$ *cho mục tiêu* $\{S_0, S_1, S_2; E\}$. *Gọi:*

$$E_0 = S_0E \cap S_1S_2,$$
$$E_1 = S_1E \cap S_0S_2,$$
$$E_2 = S_2E \cap S_0S_1.$$

Chứng minh rằng, các giao điểm $E_iE_j \cap S_iS_j$ *với* $i \neq j$, *nằm trên một đường thẳng.*

Bài tập 1.25. *Trong* $\mathbb{P}^3$ *cho phương trình tổng quát của hai đường thẳng. Tìm điều kiện (về các hệ số của các phương trình) để hai đường thẳng đó không cắt nhau. Chứng tỏ rằng, đó cũng là điều kiện để hai đường thẳng ấy không nằm trên một mặt phẳng.*

Bài tập 1.26. *Trong* $\mathbb{P}^3$ *cho phương trình tổng quát của hai đường thẳng* d *và* d' *không có điểm chung, và cho tọa độ của điểm* M *không nằm trên* d *và* d'. *Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua* M *cắt cả* d *và* d'.

Bài tập 1.27. *Chứng minh rằng,* r *siêu phẳng độc lập khi và chỉ khi chúng không cùng đi qua một* $(n - r + 1)$ *- phẳng.*

Bài tập 1.28. *Trong* $\mathbb{P}^3$ *cho 4 điểm:*

$$A = (1 : -1 : 1 : -1),\ B = (0 : 1 : -1 : 0),$$
$$C = (1 : 0 : 0 : -1),\ D = (p : -p + q : p - q : -p).$$

Chứng minh rằng 4 điểm đó thẳng hàng và tìm tỉ số kép $[A, B, C, D]$. *Với giá trị nào của* p *và* q *thì* A, B, C, D *là hàng điểm điều hoà?*

Bài tập 1.29. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, 3 điểm P, Q, R lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA và AB và không trùng với các điểm A, B, C.*

a. *E là điểm không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB.*

   Gọi $A' = AE \cap BC, B' = BE \cap CA, C' = CE \cap AB$. Chứng minh rằng, tích số: $[B, C, A', P].[C, A, B', Q].[A, B, C', R]$ bằng 1 là điều kiện cần và đủ để các đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy, và tích số đó bằng -1 là điều kiện cần và đủ để 3 điểm P, Q, R thẳng hàng.

b. *Một đường thẳng d không đi qua A, B, C và cắt các đường thẳng BC, CA và AB lần lượt tại $A", B", C"$. Chứng minh rằng tích số $[B, C, A", P].[C, A, B", Q].[A, B, C", R]$ bằng 1 là điều kiện cần và đủ để P, Q, R thẳng hàng, bằng -1 là điều kiện cần và đủ để 3 đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy (Định lý Xêva (Ceva) và định lý Mênêlauýt (Menelaus)).*

Bài tập 1.30. *Trong mặt phẳng xạ ảnh cho 3 điểm thẳng hàng và phân biệt A, B, C. Chỉ dùng thước (để vẽ các đường thẳng) hãy dựng điểm D sao cho $[A, B, C, D] = -1$.*

Bài tập 1.31. *Cho 4 điểm phân biệt thẳng hàng A, B, C, D sao cho $[A, B, C, D] > 0$. Chứng minh rằng có cặp điểm P, Q duy nhất sao cho $[A, B, P, Q] = [C, D, P, Q] = -1$.*

Bài tập 1.32. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho bốn đường thẳng có phương trình lần lượt là:*

$$x_0 - x_1 + 2x_2 = 0; \quad 3x_1 + x_2 = 0;$$
$$x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0; \quad 3x_0 + 7x_2 = 0.$$

Chứng tỏ rằng, chúng cùng thuộc một chùm đường thẳng xác định tọa độ tâm của chùm và tính tỉ số kép của bốn đường thẳng theo thứ tự đã cho.

Bài tập 1.33. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho hai đường thẳng phân biệt d và d' cắt nhau tại A, trên d lấy 3 điểm phân biệt B, C, D và khác với A; trên d' lấy 3 điểm phân biệt B', C', D' và khác với A. Chứng minh rằng 3 đường thẳng BB', CC', DD' đồng quy khi và chỉ khi:*

$$[A, B, C, D] = [A, B', C', D'].$$

Cần thêm điều kiện gì để ngoài ra còn có: DC', BB', CD' đồng quy?

Bài tập 1.34. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho hai điểm phân biệt O và O' nằm trên đường thẳng a, cho 3 đường thẳng phân biệt b, c, d cùng đi qua O và khác với a, cho 3 đường thẳng phân biệt b', c', d' cùng đi qua O' và khác với a. Chứng minh rằng 3 giao điểm của b và b', của c và c', của d và d' cùng nằm trên một đường thẳng khi và chỉ khi:*

$$[a, b, c, d] = [a, b', c', d'].$$

Cần có thêm điều kiện gì để ngoài ra còn có: 3 giao điểm $b \cap b', d \cap c', c \cap d'$ cũng thẳng hàng?

Bài tập 1.35. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho 2 đường thẳng phân biệt a, b và một điểm M không nằm trên chúng. Qua M vẽ đường thẳng thay đổi cắt a và b lần lượt tại A và B. Tìm quỹ tích những điểm N sao cho $[A, B, M, N] = k$ không đổi.*

Bài tập 1.36. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho 2 đường thẳng phân biệt a, b và điểm M không nằm trên chúng. Vẽ qua M 2 đường thẳng thay đổi, cắt a ở A và A', và cắt b ở B và B'. Tìm quỹ tích giao điểm của AB' và $A'B$.*

Bài tập 1.37. *Chứng minh lại định lý Papuýt bằng cách dùng tỉ số kép.*

Bài tập 1.38. *Phát biểu định lý đối ngẫu của định lý Papuýt và định lý Đơdac trong $\mathbb{P}^2$.*

Bài tập 1.39. *Phát biểu định lý đối ngẫu của định lý Xêva và Mênêlauýt trong $\mathbb{P}^2$.*

Bài tập 1.40. *Phát biểu định lý đối ngẫu của định lý Đơdác trong $\mathbb{P}^3$.*

Bài tập 1.41. *"Trong $\mathbb{P}^2$ cho 4 đường thẳng a, b, c, d cùng đi qua điểm O. Một đường thẳng m không đi qua O cắt a, b, c, d lần lượt tại A, B, C, D thì tỉ số kép $[A, B, C, D]$ không phụ thuộc vào m". Hãy phát biểu mệnh đề đối ngẫu.*

Bài tập 1.42. *Chứng minh các định lý sau đây trong mặt phẳng afin bằng phương pháp xạ ảnh:*

a. *Hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.*

b. *Trong một hình thang, trung điểm của hai cạnh đáy chia điều hoà cặp giao điểm hai đường chéo và giao điểm hai cạnh bên.*

c. *Đường trung bình trong hình thang thì song song với hai cạnh đáy.*

Bài tập 1.43. *Từ các định lý Đơdác, Mênêlauýt, Xêva trong mặt phẳng xạ ảnh, hãy suy ra những định lý của hình học afin.*

Bài tập 1.44. *Giải các bài toán dựng hình sau đây trong mặt phẳng afin bằng cách chỉ dùng thước (để vẽ đường thẳng):*

a. *Dựng trung điểm của đoạn thẳng AB cho trước khi đã cho trước một đường thẳng d song song với đường thẳng AB.*

b. *Cho C là trung điểm của đoạn thẳng AB và một điểm D không thẳng hàng với A, B. Dựng qua D một đường thẳng song song với AB.*

Chương 2

ÁNH XẠ XẠ ẢNH VÀ BIẾN ĐỔI XẠ ẢNH

- Mục tiêu của chương này giúp người học nắm được ánh xạ xạ ảnh và các tính chất của nó; biết xác định ánh xạ xạ ảnh và tìm được mối liên hệ giữa biến đổi xạ ảnh và biến đổi afin; nắm được các định lý cơ bản về các phép biến đổi xạ ảnh.

- Biết vận dụng lý thuyết vào giải các bài tập.

2.1 Ánh xạ xạ ảnh

2.1.1 Định nghĩa

Cho các $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh $(\mathbb{P}, p, \mathbb{V})$ và $(\mathbb{P}', p', \mathbb{V}')$. Một ánh xạ $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$, được gọi là *ánh xạ xạ ảnh* nếu có ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, sao cho nếu $\overrightarrow{x} \in \mathbb{V}$ là đại diện của điểm $X \in \mathbb{P}$ thì vector $\varphi(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{V}'$ là đại diện cho điểm $f(X) \in \mathbb{P}'$ (nói cách khác, nếu $p(\langle \overrightarrow{x} \rangle) = X$ thì $p'(\varphi\langle \overrightarrow{x} \rangle) = f(X)$).

Khi đó ta nói rằng ánh xạ tuyến tính φ là *đại diện* của ánh xạ xạ ảnh f.

2.1.2 Tính chất của ánh xạ xạ ảnh

Cho ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$, có đại diện là ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$. Khi đó:

a. **Ánh xạ tuyến tính φ là đơn cấu.** Thật vậy nếu vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{V} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ là đại diện cho điểm $X \in \mathbb{P}$, thì vector $\varphi(\overrightarrow{x})$ đại diện cho điểm $f(X)$ nên $\varphi(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{V}' \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

b. **Ánh xạ xạ ảnh f là đơn ánh.** Thật vậy, giả sử A và B là hai điểm của $\mathbb{P}$ mà $f(A) = f(B)$. Khi đó, nếu gọi $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ là các vector đại diện của A và B thì $\varphi(\overrightarrow{a})$ và $\varphi(\overrightarrow{b})$ cùng đại diện cho một điểm $f(A) = f(B)$ nên $\varphi(\overrightarrow{a}) = k\varphi(\overrightarrow{b}) = \varphi(k\overrightarrow{b}), k \neq 0$. Vì φ đơn cấu nên suy ra $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$, tức là A và B trùng nhau.

c. **Ánh xạ xạ ảnh bảo tồn tính độc lập và tính phụ thuộc của một hệ điểm** (do đơn cấu tuyến tính bảo tồn sự độc lập tuyến tính và sự phụ thuộc tuyến tính của hệ vector). Từ đó suy ra: **Ánh xạ xạ ảnh bảo tồn các khái niệm: m - phẳng, số chiều của phẳng, giao và tổng của các phẳng, tỉ số kép của hàng bốn điểm và của chùm bốn siêu phẳng.**

d. **Mỗi đơn cấu tuyến tính $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ là đại diện cho một ánh xạ xạ ảnh duy nhất $\mathbf{f} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$**. Hai đơn cấu tuyến tính $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ và $\varphi' : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ cùng đại diện cho một ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ khi và chỉ khi có số $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sao cho $\varphi = k\varphi'$.

   Thật vậy, nếu đã cho đơn cấu tuyến tính $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ thì ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ được hoàn toàn xác định bởi: Nếu $M \in \mathbb{P}$ có đại diện là vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{V}$ thì $f(M)$ có đại diện là $\varphi(\overrightarrow{x})$. Nếu $\varphi' : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ cũng là đại diện cho ánh xạ xạ ảnh f thì với mọi vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{V}$, các vector $\varphi(\overrightarrow{x})$ và $\varphi'(x)$ cũng là đại diện cho một điểm $\mathbb{P}'$ nên $\varphi(\overrightarrow{x}) = k_x\varphi'(\overrightarrow{x})$. Do φ và φ' đều là đơn cấu tuyến tính nên ta suy ra k_x không phụ thuộc vào $\overrightarrow{x}$.

2.1.3 Định lý về sự xác định phép ánh xạ xạ ảnh

Định lý 2.1.1. *Cho hai $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$ có số chiều lần lượt là n và m ($n \leqslant m$). Trong $\mathbb{P}$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_0, S_1, ..., S_n; E\}$ và trong $\mathbb{P}'$ cho $n + 2$ điểm phụ thuộc $S'_0, S'_1, ..., S'_n; E'$, sao cho bất kì $n + 1$ điểm trong số đó đều độc lập. Khi đó, có một và chỉ một ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ sao cho $f(S_i) = S'_i$, $i = 0, 1, 2, .., n$ và $f(E) = E'$.*

Chứng minh. Gọi $\mathbb{V}^{n+1}$ và $\mathbb{V}^{m+1}$ là các không gian vector lần lượt liên kết với $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$. Trong $\mathbb{V}^{n+1}$ lấy cơ sở $\{\overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ liên kết với mục tiêu $\{S_i; E\}$. Trong $\mathbb{V}^{m+1}$ lấy $n + 1$ vector $\overrightarrow{e}'_i$ độc lập tuyến tính sao cho $\overrightarrow{e}'_i$ là đại diện cho S'_i và $\sum_{i=0}^{n} \overrightarrow{e}'_i$ là đại diện cho E'.

Khi đó có duy nhất một đơn cấu tuyến tính:

$$\varphi : \mathbb{V}^{n+1} \to \mathbb{V}^{m+1} \text{ sao cho } \varphi(\overrightarrow{e}_i) = \overrightarrow{e}'_i,\ i = 0, 1, ..., n.$$

Rõ ràng là φ đại diện cho $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ và f là ánh xạ xạ ảnh duy nhất thoả mãn yêu cầu của định lý. □

2.1.4 Đẳng cấu xạ ảnh. Hình học xạ ảnh

Dễ thấy rằng ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ là một song ánh khi và chỉ khi $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$ có cùng số chiều. Khi đó, f gọi là *một đẳng cấu xạ ảnh,* và hai không gian $\mathbb{P}$ và $\mathbb{P}'$ gọi là *đẳng cấu.*

Rõ ràng là ánh xạ tuyến tính đại diện cho đẳng cấu xạ ảnh là phép đẳng cấu tuyến tính.

Một đẳng cấu xạ ảnh $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}$ lên chính nó được gọi là *phép biến đổi xạ ảnh* của $\mathbb{P}$. Dễ thấy rằng, tập hợp các biến đổi xạ ảnh của $\mathbb{P}$ làm thành một nhóm, nó được gọi là *nhóm xạ ảnh* của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}$. Nhóm xạ ảnh của $\mathbb{P}$ đẳng cấu với nhóm thương $GL(\mathbb{V}) \,/\, \{k\, Id_v |\, k \neq 0\}$, trong đó $\mathbb{V}$ là không gian vector liên kết với $\mathbb{P}$.

Từ định lý về sự xác định phép ánh xạ xạ ảnh ta suy ra: **Nếu trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^{\mathbf{n}}$ cho hai mục tiêu xạ ảnh $\{\mathbf{S_i}; \mathbf{E}\}$ và $\{\mathbf{S'_i}; \mathbf{E'}\}$, thì có phép biến đổi xạ ảnh duy nhất f của $\mathbb{P}^{\mathbf{n}}$, biến các điểm $\mathbf{S_i}$ thành các điểm $\mathbf{S'_i}$ $(\mathbf{i} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, ..., \mathbf{n})$ và biến $\mathbf{E}$ thành $\mathbf{E'}$.**

Mỗi tập con H của $\mathbb{P}^n$ gọi là *một hình*. Hình H gọi là *tương đương xạ ảnh* với hình H' nếu có một phép biến đổi xạ ảnh f biến H thành H'. Quan hệ tương đương xạ ảnh của các hình là một quan hệ tương đương.

Một tính chất của hình H gọi là *tính chất xạ ảnh* (hay *bất biến xạ ảnh*) nếu mọi hình H' tương đương với H đều có tính chất đó. Như vậy, hai hình tương đương xạ ảnh đều có các tính chất xạ ảnh giống nhau.

Tập hợp các tính chất xạ ảnh của các hình trong $\mathbb{P}^n$ gọi là *Hình học xạ ảnh trên* $\mathbb{P}^n$.

2.1.5 Biểu thức toạ độ của phép biến đổi xạ ảnh

Cho $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ là phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, liên kết với không gian vector $\mathbb{V}^{n+1}$. Ta hãy chọn mục tiêu xạ ảnh nào đó $\{S_i; E\}$. Với mỗi điểm X bất kì, gọi $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ là toạ độ của nó và $(x'_0 : x'_1 : ... : x'_n)$ là toạ độ của $X' = f(X)$. Ta hãy tìm sự liên hệ giữa x_i và x'_i.

Gọi $\{\overrightarrow{e}_0, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ là cơ sở trong $\mathbb{V}^{n+1}$ đại diện cho mục tiêu $\{S_i; E\}$, và $\varphi : \mathbb{V}^{n+1} \to \mathbb{V}^{n+1}$ là biến đổi tuyến tính của $\mathbb{V}^{n+1}$, đại diện cho biến đổi xạ ảnh f. Giả sử đối với cơ sở đó, φ có biểu thức toạ độ:

$$x'_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j, \; i = 0, 1, 2, ..., n. \tag{2.1}$$

trong đó, ma trận $A = (a_{ij})$ có hạng bằng $n + 1$, tức là $\det A \neq 0$. Ma trận A chính là ma trận chuyển từ cơ sở (e_i) sang cơ sở ảnh của nó qua phép φ.

Để ý đến mối quan hệ giữa toạ độ xạ ảnh của một điểm với toạ độ của vector đại diện nó, ta suy ra biểu thức liên hệ giữa toạ độ của X và X' là:

$$kx'_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j, \; i = 0, 1, 2, ..., n; \; k \neq 0.$$

trong đó, ma trận $A = (a_{ij})$ $i, j = 0, 1, 2, ..., n$ có hạng bằng $n + 1$ (tức là có định thức khác 0), nó gọi là *ma trận của phép biến đổi xạ ảnh* f đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$.

Các cột của A là các cột toạ độ của các điểm $f(S_i)$, nhưng phải chọn sao cho:

$$(\sum_{j=0}^{n} a_{0j} : \sum_{j=0}^{n} a_{ij} : ... : \sum_{j=0}^{n} a_{nj})$$

là toạ độ của điểm $f(E)$.

Biểu thức (2.1) có thể viết dưới dạng ma trận: $k.x' = A.x$, trong đó x và x' là ma trận cột toạ độ của điểm X' và điểm X.

Ví dụ 2.1.2. *Đối với một mục tiêu $\{S_0, S_1, S_2; E\}$ của mặt phẳng xạ ảnh $\mathbb{P}^2$, cho các điểm $E_1 = (0:1:1), E_2 = (1:0:1), E_3 = (1:1:0)$.*

a. Chứng tỏ rằng, có phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ lần lượt biến các điểm S_0, S_1, S_2, S_3, E thành các điểm E_0, E_1, E_2, E_3, S_0.

b. Tìm ma trận của f đối với mục tiêu đã chọn.

Lời giải:

a. Chỉ cần chứng tỏ rằng ba điểm nào đó trong bốn điểm E_1, E_2, E_3, S_0 đều độc lập. Đó là các định thức dưới đây đều khác 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

b. Ma trận A của f có dạng:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

Các số a, b, c phải khác 0 và phải chọn sao cho $(a + b : a + c : a + b)$ là toạ độ của S_0, tức là phải tỉ lệ với $(1; 0; 0)$. Vậy phải có $b = c = -a$.

Ta có thể chọn: $a = -1, b = c = 1$. Như vậy biểu thức toạ độ của f là:

$$\begin{cases} kx'_0 &= x_1 + x_2, \\ kx'_1 &= -x_0 + x_2, \qquad k \neq 0. \\ kx'_2 &= -x_0 + x_1. \end{cases}$$

2.1.6 Liên hệ giữa biến đổi xạ ảnh và biến đổi afin

Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ cho mục tiêu $\{S_i; E\}$, gọi W là siêu phẳng có phương trình $x_0 = 0$. Xét phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ sao cho $f(W) = W$.

Giả sử đối với mục tiêu trên, f có biểu thức toạ độ:

$$kx'_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j, \ i = 0, 1, 2, ..., n; \ k \neq 0,$$

Vì $f(W) = W$ nên nếu $x_0 = 0$ thì $x'_0 = 0$, tức là: $a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + ... + a_{0n}x_n = 0$ với mọi giá trị của $x_1, x_2, ..., x_n$.

Suy ra: $a_{01} = a_{02} = ... = a_{0n} = 0$.

Vậy biểu thức toạ độ của f bây giờ là:

$$\begin{cases} kx'_0 &= a_{00}x_0, \\ kx'_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ta chú ý rằng: $k \neq 0$, $a_{00} \neq 0$ và ma trận $A'(a_{ij})$ $i, j = 1, 2, ..., n$ có hạng bằng n.

Ta gọi như thường lệ, $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{W}$ là không gian afin. Vì $f(\mathbb{W}) = \mathbb{W}$ nên $f(\mathbb{A}^n) = \mathbb{A}^n$. Vậy ta có ánh xạ hạn chế: $f' = f|_{\mathbb{A}^n} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$. Khi đó bằng cách chuyển từ toạ độ xạ ảnh của một điểm trong $\mathbb{A}^n$ thành toạ độ afin của nó (đối với mục tiêu afin sinh bởi mục tiêu xạ ảnh) ta tìm thấy biểu thức toạ độ của f' :

$$X'_i = \sum_{j=1}^n a'_{ij}X_j + a'_{i0}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

trong đó $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{00}}$, với $i, j = 1, 2, ..., n$.

Ta đã biết, ma trận $A' = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, có hạng n. Do đó ma trận $A'' = (a'_{ij})$, $i, j = 1, 2, ..., n$ cũng có hạng bằng n. Từ đó suy ra f' là phép biến đổi afin của $\mathbb{A}^n$, ta gọi nó là *phép biến đổi afin sinh bởi phép biến đổi xạ ảnh f.*

Như vậy, ta đã chứng minh rằng, mỗi phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ sinh ra một phép biến đổi afin $f' : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ nếu $f(\mathbb{W}) = \mathbb{W}$.

Ngược lại: **mọi phép biến đổi afin đều được sinh ra bởi một phép biến đổi xạ ảnh duy nhất f mà f($\mathbb{W}$) = $\mathbb{W}$ (ta nói rằng f biến đổi vô tận thành điểm vô tận).**

Thật vậy, giả sử $f' : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ là phép biến đổi afin có biểu thức toạ độ đối với một mục tiêu afin là:

$$X'_i = \sum_{j=1}^n a'_{ij}X_j + a'_{i0}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó, trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, với mục tiêu xạ ảnh sinh ra bởi mục tiêu afin nói trên, ta xét phép biến đổi xạ ảnh có biểu thức toạ độ:

$$\begin{cases} kx'_0 &= x_0, \\ kx'_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

thì dễ thấy rằng phép biến đổi afin f' được sinh ra bởi phép biến đổi xạ ảnh f.

2.2 Các phép thấu xạ trong $\mathbb{P}^n$

2.2.1 Định nghĩa

Trong $\mathbb{P}^n$ cho r - phẳng U và $(n-r-1)$ - phẳng V không có điểm chung. Khi đó, cặp (U, V) sẽ gọi là một r - cặp. Cố nhiên, theo định nghĩa đó (V, U) là một $(n-r-1)$ - cặp.

Bây giờ cho r - cặp (U, V) và cho phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ sao cho mọi điểm nằm trên U hoặc V đều bất động. Khi đó f được gọi là *phép thấu xạ r - cặp với cơ sở là r - cặp* (U, V).

2.2.2 Biểu thức toạ độ của phép thấu xạ

Giả sử f là phép thấu xạ r - cặp với cơ sở là r - cặp (U, V). Vì $\dim U = r$ nên có thể chọn trên U $(r+1)$ điểm độc lập $S_0, S_1, ..., S_r$. Vì $\dim V = n-r-1$ nên có thể chọn trên V $(n-r-1)$ điểm độc lập $S_{r+1}, S_{r+2}, ..., S_n$. Chọn thêm một điểm E không nằm trên U hoặc V thì ta được một mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ trong $\mathbb{P}^n$.

Đối với mục tiêu đó, r - phẳng U có phương trình: $x_{r+1} = x_{r+2} = ... = x_n = 0$, còn $(n-r-1)$ - phẳng V có phương trình: $x_0 = x_1 = ... = x_r = 0$.

Vì các điểm của U và V đều bất động nên dễ dàng thấy rằng biểu thức toạ độ của f đối với mục tiêu đó có dạng:

$$\begin{cases} kx'_i = px_i \text{ với } p \neq 0 \text{ và } i = 0, 1, ..., r. \\ kx'_j = px_j \text{ với } q \neq 0 \text{ và } j = r+1, r+2, ..., n. \end{cases}$$

Ma trận của f là:

$$A = \begin{pmatrix} p & & & & & & & \\ & p & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & p & & & & \\ & & & & q & & & \\ & & & & & q & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & q \end{pmatrix}$$

(Có $r+1$ số p và $n-r$ số q trên đường chéo chính ngoài ra là số 0).

Nếu $p = q$ thì f là phép đồng nhất.

2.2.3 Tính chất của phép thấu xạ

Dựa vào biểu thức toạ độ, ta có thể chứng minh tính chất sau đây của phép thấu xạ khác đồng nhất:

Nếu điểm M không bất động thì đường thẳng nối M và ảnh M' của nó luôn luôn cắt U và V. Giả sử hai giao điểm đó là A và B thì tỉ số kép $[M, M', A, B]$ không phụ thuộc vào M.

Tỉ số kép đó gọi là *tỉ số thấu xạ* của phép thấu xạ f.

Thật vậy, giả sử $M = (x_0 : ... : x_r : x_{r+1} : ... : x_n)$. Nếu M không nằm trên U và trên V thì trong số các $x_0, ..., x_r$ phải có ít nhất một số khác 0, và trong số các $x_{r+1}, ..., x_n$ phải có một số khác 0.

Ta có $M' = (px_0 : ... : px_r : px_{r+1} : ... : px_n)$. Điểm A nằm trên MM', nên A có toạ độ: $(A) = k(M) + j(M')$. Mặt khác, A nằm trên U nên toạ độ của nó phải thoả mãn phương trình của U. Do đó: $kx_j + lqx_j = 0$ $(i = r+1, ..., n)$. Vì có ít nhất một $x_j \neq 0$ nên $k + lq = 0$. Ta lấy $l = 1$ và $k = -q$.

Vậy đường thẳng MM' cắt U tại A mà:

$$(A) = -q(M) + (M').$$

Tương tự, đường thẳng MM' cắt V tại điểm B mà:

$$(B) = -p(M) + (M').$$

Từ đó, suy ra:

$$[M, M', A, B] = -p : -q = p : q \text{ và do đó không phụ thuộc } M.$$

2.2.4 Phép thấu xạ đơn

Định nghĩa 2.2.1. *Phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ gọi là phép thấu xạ đơn nếu có một siêu phẳng V mà mọi điểm của nó đều là điểm bất động.*

Siêu phẳng V đó gọi là *siêu phẳng cơ sở* của thấu xạ đơn f.

Hiển nhiên là phép đồng nhất là một trường hợp đặc biệt của phép thấu xạ đơn, siêu phẳng bất kì nào đều có thể xem là siêu phẳng cơ sở.

Định lý 2.2.1. *Nếu f là thấu xạ đơn khác phép đồng nhất thì có duy nhất một điểm bất động O sao cho mọi đường thẳng đi qua O đều bất động.*

Điểm O như thế gọi là *tâm* của phép thấu xạ đơn f.

Chứng minh. Giả sử f là phép thấu xạ đơn, khác phép đồng nhất và siêu phẳng cơ sở V. Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ sao cho các đỉnh $S_1, S_2, ..., S_n$ nằm trên V. Vì các đỉnh đó đều bất động, ngoài ra, điểm $E_0 = (0 : 1 : 1 : ... : 1)$ cũng bất động, nên dễ dàng suy ra biểu thức toạ độ của f :

$$\begin{cases} kx'_0 = a_0x. \\ kx'_i = a_ix_0 + ax_i \text{ với } i = 1, 2, ..., n; \text{ với } a \neq 0. \end{cases}$$

Ma trận của f là:

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & a & 0 & ... & 0 \\ a_2 & 0 & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix};$$

Chú ý rằng: Các số $a_0 - a, a_1, ..., a_n$ không đồng thời bằng 0, vì nếu không như thế thì f là phép đồng nhất. Bởi vậy, có điểm O với toạ độ $(a_0 - a : a_1 : ... : a_n)$. Dễ thấy, O là điểm bất động.

Bây giờ, lấy một đường thẳng d bất kì đi qua O, ta phải chứng minh rằng d bất động. Ta lấy trên d một điểm tuỳ ý:

$$X = (x_0 : x_1 : ...x_n),$$

thì

$$f(X) = X' = (a_0x_0 : a_1x_0 + ax_1 : ... : a_nx + ax_n).$$

Do đó: $(X') = a(X) + x_0(O)$, tức X' cũng nằm trên d. □

Chú ý. - Nếu tâm thấu xạ O không nằm trên cơ sở thấu xạ W thì phép thấu xạ đơn f chính là phép thấu xạ 0 - cặp với 0 - cặp cơ sở là (O, V).

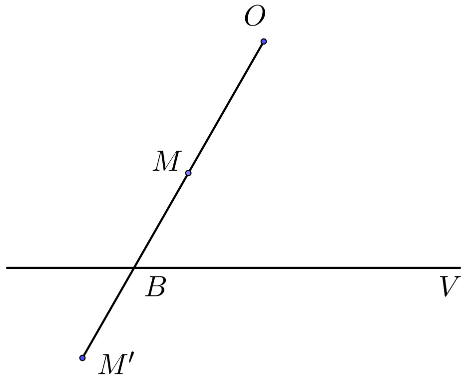
- Nếu O nằm trên V thì f không phải là thấu xạ cặp, ta gọi nó là phép thấu xạ đơn đặc biệt.

2.2.5 Các phép thấu xạ trong $\mathbb{P}^2$ và $\mathbb{P}^3$

Trong $\mathbb{P}^2$, ta có các phép thấu xạ khác phép đồng nhất sau đây:

+ Phép 0 - thấu xạ có cơ sở là 0 - cặp (O, V), trong đó, O là một điểm, còn V là đường thẳng không đi qua O.

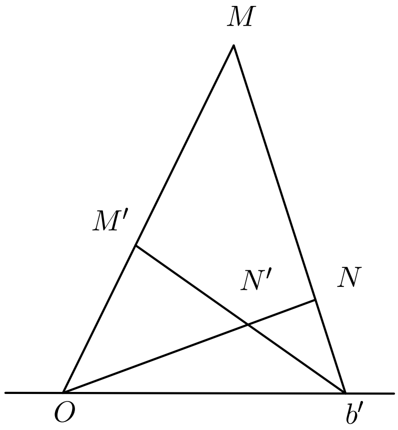
  Với mỗi điểm M không trùng O và không nằm trên V, đường thẳng OM cắt V tại B và nếu $M' = f(M)$ thì M, M', O, B thẳng hàng và $[M, M', O, B] = k$ (tỉ số thấu xạ).



\+ Phép thấu xạ đơn đặc biệt, có tâm O và có cơ sở là đường thẳng V đi qua O. Nếu ta biết một cặp điểm tương ứng M và $M' = f(M)$, thì ảnh $N' = f(N)$ được xác định bởi các điều kiện:

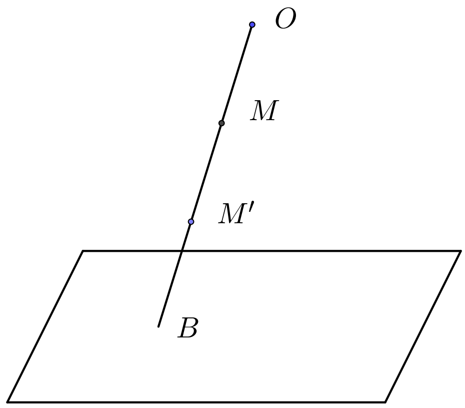
i) O, N, N' thẳng hàng.

ii) Đường thẳng MN cắt đường thẳng $M'N'$ tại một điểm nằm trên V.

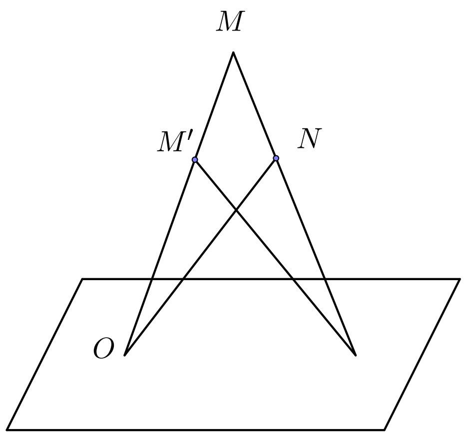


Trong $\mathbb{P}^3$, ta có các phép thấu xạ khác phép đồng nhất sau đây:

\- Thấu xạ 0 - cặp với 0 - cặp cơ sở là (O, V) trong đó O là một điểm, còn V là một mặt phẳng không đi qua O.



Với mỗi điểm M không trùng O và không nằm trên V, đường thẳng OM cắt V tại B và nếu $M' = f(M)$ thì M, M', O, B thẳng hàng và $[M, M', O, B] = k$ (tỉ số thấu xạ).



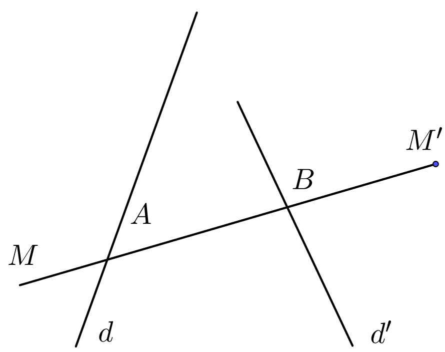
+ Phép thấu xạ đơn đặc biệt, có tâm O và có cơ sở là mặt phẳng V đi qua O.

+ Thấu xạ 1 - cặp với 1 - cặp cơ sở là (d, d'), trong đó, d và d' là hai đường thẳng không cắt nhau. Nó còn được gọi là *phép thấu xạ song trục với trục là d và d'.*

  Ảnh M' của điểm M không thuộc d và d' được xác định bởi các điều kiện:

  i) Đường thẳng MM' cắt d và d' (tại A và B chẳng hạn).

  ii) $[M, M', A, B] = k$ (tỉ số thấu xạ).



2.3 Các định lý cơ bản của phép biến đổi xạ ảnh

2.3.1 Định lý 1

Định lý 2.3.1. *Nếu $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ là một song ánh bảo tồn sự thẳng hàng của ba điểm bất kì thì f biến m - phẳng thành m - phẳng.*

Chứng minh. Giả sử cho m - phẳng U đi qua $m+1$ điểm độc lập $A_0, A_1, ..., A_m$. Gọi $A'_i = f(A_i),\ i = 0, 1, 2, ..., m$. Gọi U' là cái phẳng bé nhất đi qua các điểm A'_i. Trước hết ta chứng minh rằng: *Nếu điểm M thuộc U thì $M' = f(M)$ thuộc U'*, bằng cách quy nạp theo m.

Rõ ràng điều đó đúng khi $m = 0$ và $m = 1$. Giả sử nó đúng với $m = 1$. Nếu M thuộc U và M không trùng với A_0 thì $A_0M \cap \langle A_1, A_2, ..., A_m\rangle = I$, khi đó, nếu $I' = f(I)$, thì:

- Theo giả thiết của f, ba điểm A'_0, M', I' thẳng hàng, tức M' thuộc A'_0I'.

- Theo giả thiết quy nạp thì I' thuộc cái phẳng bé nhất đi qua $A'_1, A'_2, ..., A'_m$. Từ đó suy ra M' thuộc U'.

Bây giờ ta chứng minh hệ điểm $A'_0, A'_1, ..., A'_m$ nói trên cũng độc lập.

Thật vậy, ta hãy lấy thêm các điểm $A_{m+1}, A_{m+2}, ..., A_n$ để được hệ $n+1$ điểm độc lập $A_0, A_1, ..., A_n$. Ta gọi $A'_i = f(A_i)$. Nếu hệ điểm $A'_0, A'_1, ..., A'_m$ không độc lập thì hệ $n+1$ điểm $A'_0, A'_1, ..., A'_n$ cũng không độc lập, nên theo điều vừa chứng minh trên $f(\mathbb{P}^n) \neq \mathbb{P}^n$, trái với giả thiết f là toàn ánh. Như vậy U' cũng là m - phẳng và $f(U) \subset U'$. Nếu lấy M' thuộc U' thì do f toàn ánh nên có M để $f(M) = M'$. Điểm M thuộc U vì nếu không ta có hệ điểm $m+2$ điểm $A_0, A_1, ..., A_n, M$ độc lập nhưng ảnh của chúng không độc lập.

Tóm lại, f biến m - phẳng U thành m - phẳng U. □

2.3.2 Định lý 2

Định lý 2.3.2. *Nếu $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ là một song ánh bảo tồn sự thẳng hàng của ba điểm và bảo tồn tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng thì f là phép biến đổi xạ ảnh.*

Chứng minh. Lấy mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ trong $\mathbb{P}^n$ và gọi $S'_i = f(S_i), E' = f(E)$ thì theo định lý (2.3.1), $\{S'_i; E'\}$ cũng là mục tiêu xạ ảnh. Gọi g là phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbb{P}^n$, biến mục tiêu $\{S_i; E\}$ thành mục tiêu $\{S'_i; E'\}$, và $h = g_0^{-1}f$. Khi đó, h là song ánh của $\mathbb{P}^n$ bảo tồn tính thẳng hàng của ba điểm, bảo tồn tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng, và giữ bất động các điểm của mục tiêu $\{S_i; E\}$. Ta chỉ còn phải chứng minh h là phép đồng nhất.

Sau đây ta chứng minh điều đó bằng quy nạp theo n.

Nếu $n = 1$, thì nếu $M' = h(M)$, ta có: $[S_0, S_1, E, M] = [S_0, S_1, E, M']$, cho nên $M = M'$.

Giả sử điều đó đúng với $n-1$, ta chứng minh nó đúng với n.

Gọi W_i là siêu phẳng đi qua mọi đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh S_i, và E_i là giao điểm của W_i với đường thẳng S_iE thì $h(W_i) = W_i$ và $h(S_iE) = S_iE$, nên $h(E_i) = E_i$. Từ đó, theo giả thiết quy nạp ta có: $h|_{W_i} = Id_{W_i}$. Bây giờ giả sử M là một điểm bất kì không nằm trên các W_i. Đường thẳng S_0M cắt W_0 tại điểm bất động đối với h nên đó là đường thẳng bất động. Tương tự, đường thẳng S_1M cũng bất động. Vậy, M bất động, hay h là phép đồng nhất. □

2.3.3 Định lý 3

Định lý 2.3.3. *Cho $\mathbb{P}^n$ là không gian xạ ảnh trên trường số thực với $n > 1$. Nếu $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ là song ánh bảo tồn sự thẳng hàng của ba điểm bất kì thì nó là phép biến đổi xạ ảnh.*

Chứng minh. Lấy siêu phẳng W nào đó của $\mathbb{P}^n$ và gọi $W' = f(W)$. Theo định lý (2.3.1), W' cũng siêu phẳng. Gọi $g : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ là ánh xạ xạ ảnh sao cho $g(W') = W$. Khi đó $h = g_0 f$ là song ánh bảo tồn sự thẳng hàng của ba điểm bất kì và $h(W) = W$.

Xét không gian afin $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus W$ và song ánh $h' : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ là hạn chế của h trên $\mathbb{A}^n$.

Xét song ánh h' bảo tồn sự thẳng hàng của ba điểm tuỳ ý, nên theo định lý cơ bản của biến đổi afin, ta suy ra h' là phép biến đổi afin (xem giáo trình *"Hình học afin và hình học Ơclit"*).

Nhưng phép biến đổi afin h' được sinh ra bởi một phép biến đổi xạ ảnh duy nhất, và ta dễ thấy rằng phép biến đổi xạ ảnh đó trùng với phép h. Từ đó suy ra $f = g_0^{-1} h$ cũng là phép biến đổi xạ ảnh. □

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 2.1. *Cho không gian xạ ảnh $(\mathbb{P}^n, p, \mathbb{V}^{n+1})$. Các phép vị tự của $\mathbb{V}^{n+1}$ đại diện cho những phép biến đổi xạ ảnh nào của $\mathbb{P}^n$?*

Bài tập 2.2. *Nếu biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ giữ bất động $r + 1$ điểm độc lập nằm trên một r - phẳng thì nó có giữ bất động mọi điểm của r - phẳng đó không?*

Bài tập 2.3. *Trong $\mathbb{P}^n$ cho r - phẳng U, trên U lấy $r + 2$ điểm trong đó bất kì $n + 1$ điểm nào đều độc lập. Chứng tỏ rằng, nếu $r + 2$ điểm đó đều bất động qua phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbb{P}^n$, thì mọi điểm của U đều bất động.*

Bài tập 2.4. *Trong $\mathbb{P}^n$ cho phép biến đổi xạ ảnh có biểu thức toạ độ: $k.x' = A.x$. Tìm toạ độ của:*

- *a. Ảnh của siêu phẳng $U = (u_0 : u_1 : ... : u_n)$.*
- *b. Tạo ảnh của điểm $X' = (x'_0 : x'_1 : ... : x'_n)$.*
- *c. Tạo ảnh của siêu phẳng $U' = (u'_0 : u'_1 : ... : u'_n)$.*

Bài tập 2.5. *Trong $\mathbb{P}^n$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có biểu thức toạ độ: $k.x' = A.x$.*

Gọi $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A (I_n là ma trận đơn vị cấp n). Chứng minh rằng:

- *a. Toạ độ $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ của điểm bất động là nghiệm của hệ phương trình: $(A - \lambda I_n)x = 0$, trong đó λ là nghiệm của đa thức đặc trưng.*

b. Toạ độ $(u_0 : u_1 : ... : u_n)$ của siêu phẳng bất động là nghiệm của hệ: $(A' - \lambda I_n)u = 0$, trong đó λ là nghiệm của đa thức đặc trưng.

c. Nếu λ là nghiệm đơn của đa thức đặc trưng thì điểm bất động và siêu phẳng bất động ứng với nghiệm đó không thuộc nhau.

Bài tập 2.6. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_0, S_1, S_2; E\}$. Tìm biểu thức toạ độ của phép biến đổi xạ ảnh thoả mãn một trong những điều kiện sau đây:*

a. Các điểm S_i đều là điểm bất động (tức là biến thành chính nó).

b. Các điểm S_0, S_1, S_2 lần lượt biến thành S_1, S_2, S_0 và điểm E bất động.

c. Điểm S_0 bất động, đường thẳng S_1S_2 bất động (đường thẳng biến thành chính nó) và điểm S_1 biến thành S_2.

Bài tập 2.7. *Gọi $\{S_0, S_1, S_2, S_3; E\}$ là mục tiêu xạ ảnh trong $\mathbb{P}^3$. Tìm biểu thức toạ độ của tất cả các phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ thoả mãn một trong các điều kiện sau đây:*

a. Các điểm S_0, S_1, S_2, S_3 đều biến thành chính nó.

b. Hai đường thẳng S_0S_1 và S_2S_3 đều biến thành chính nó.

c. Các đường thẳng S_0S_1 biến thành đường thẳng S_2S_3.

d. Chỉ có hai điểm bất động là S_0, S_2 và chỉ có một đường thẳng bất động là S_1S_3.

Chú ý. *Đường thẳng bất động là đường thẳng biến thành chính nó, tuy nhiên mỗi điểm của nó có thể không bất động.*

e. Có hai đường thẳng bất động là S_0S_1 và S_2S_3, không có điểm bất động và mặt phẳng bất động.

f. Các điểm S_0, S_1 và mọi điểm trên S_2S_3 đều bất động.

g. Các điểm của mặt phẳng $\langle S_0, S_1, S_2 \rangle$ đều bất động và đường thẳng S_0S_3 bất động.

Bài tập 2.8. *Các phép biến đổi xạ ảnh dưới đây của $\mathbb{P}^3$ sinh ra phép afin nào, giải thích ý nghĩa hình học của các phép afin đó:*

a. $kx'_0 = x_0,\ kx'_i = -x_i,\ i = 1, 2, 3.$

b. $kx'_0 = x_0,\ kx'_1 = x_1, kx'_2 = -x_2,\ kx'_3 = x_3.$

c. $kx'_0 = x_0,\ kx'_1 = x_1, kx'_2 = x_2,\ kx'_3 = -x_3.$

d. $kx'_0 = x_0,\ kx'_1 = x_1,\ kx'_2 = x_2,\ kx'_3 = -2x_1 - 2x_2 - x_3.$

Bài tập 2.9. *Trong* $\mathbb{P}^3$ *cho mục tiêu* $\{S_0, S_1, S_2, S_2; E\}$. *Viết biểu thức của phép thấu xạ 1 - cặp với cơ sở là cặp đường thẳng* S_0S_1, S_2S_3 *và có tỉ số* k.

Bài tập 2.10. *Trong* $\mathbb{P}^2$, *cho phép biến đổi xạ ảnh:*

$$\begin{cases} kx'_0 &= 2x_0 + x_1 + x_2. \\ kx'_1 &= x_0 + 2x_1 + x_2. \\ kx'_2 &= x_0 + x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng đó là một phép thấu xạ cặp. Xác định cơ sở và tỉ số thấu xạ.

Bài tập 2.11. *Trong* $\mathbb{P}^3$ *cho mặt phẳng* V *có phương trình:*

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Gọi f *là phép thấu xạ đơn có cơ sở* V, *có tâm thấu xạ* $(1 : 0 : 0 : 0)$. *Tìm biểu thức toạ độ của* f *trong các trường hợp sau đây:*

a. *Tỉ số thấu xạ là* $k = 3$.

b. f *biến điểm* $(0 : 1 : 1 : 1)$ *thành* $(3 : 1 : 1 : 1)$. *Tìm tỉ số thấu xạ.*

c. f *có tính chất đối hợp, nghĩa là* f^2 *là phép đồng nhất.*

Bài tập 2.12. *Trong* $\mathbb{P}^2$ *cho các điểm* $A = (1 : 1 : 1), B = (0 : 1 : 2), C = (1 : 0 : 3), D = (1 : 2 : 0), E = (3 : 0 : 1)$. *Tìm biểu thức toạ độ của phép biến đổi xạ ảnh* $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, *biết rằng* f *giữ bất động các điểm* A, B, C *và biến điểm* D *thành điểm* E. *Đó có phải là phép thấu xạ không?*

Bài tập 2.13. *Trong* $\mathbb{P}^3$ *cho hai đường thẳng* d *và* d' *lần lượt có phương trình:*

$$\begin{cases} x_0 - x_1 &= 0. \\ 2x_0 + x_2 + 3x_3 &= 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_0 - 3x_1 + x_3 &= 0. \\ x_0 + x_2 &= 0. \end{cases}$$

Tìm biểu thức toạ độ của phép thấu xạ 1 - cặp với cơ sở là cặp (d, d') *và tỉ số thấu xạ* $k = -1$.

Bài tập 2.14. *Trong* $\mathbb{P}^n$ *cho hai hệ điểm độc lập* $A_0, A_1, ..., A_n$ *và* $B_0, B_1, ..., B_n$ *sao cho* A_i *không thuộc đường thẳng* B_iB_j $(j \neq i$ *tuỳ ý),* B_i *không thuộc đường thẳng* A_iA_j $(i \neq j$ *tuỳ ý). Chứng minh rằng hai điều kiện sau đây tương đương:*

a. *Các đường thẳng* A_iB_i *đồng quy.*

b. *Các giao điểm* A_iA_j *và* B_iB_j *cùng nằm trên một siêu phẳng.*

(Định lý Đơdác I trong không gian $\mathbb{P}^n$*).*

Bài tập 2.15. *Cho* $f : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ *là phép thấu xạ song trục, với trục* d *và* d'. *Phép* f *sinh ra phép afin nào đó của* $\mathbb{P}^3 \setminus W$ *nếu* W *là mặt phẳng đi qua* d'*?*

Chương 3

SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG $\mathbb{P}^n$

- Mục tiêu của chương này là cung cấp cho người học về siêu mặt bậc hai và phân loại xạ ảnh của chúng; nắm được liên hệ giữa siêu mặt bậc hai xạ ảnh và siêu mặt bậc hai afin; cũng như biết được các định lý nổi tiếng: Stâyne, Paxcal, Brianshon, Frêgiê, Đơdác 2,...

- Biết vận dụng làm bài tập.

3.1 Siêu mặt bậc hai và phân loại xạ ảnh của chúng

3.1.1 Định nghĩa và kí hiệu

Phương trình bậc hai thuần nhất của $n+1$ biến $x_0, x_1, ..., x_n$ trên trường $\mathbb{K}$ là phương trình có dạng:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0 \tag{3.1}$$

trong đó, $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $a_{ij} = a_{ji}$, và có ít nhất một a_{ij} khác không.

Ta kí hiệu ma trận $A = (a_{ij})$ $i, j = 0, 1, 2, ..., n$, thì A là ma trận vuông đối xứng, cấp $n+1$ có hạng ít nhất bằng 1.

Lại kí hiệu x là ma trận 1 cột, $n+1$ dòng:

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

thì phương trình (3.1) có thể viết dưới dạng là:

$$x^tAx = 0 \tag{3.2}$$

trong đó x^t là ma trận chuyển vị của ma trận x, còn 0 kí hiệu cho ma trận một dòng một cột gồm một số 0.

3.1.2 Định nghĩa

Trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$, với mục tiêu $\{S_i; E\}$, tập hợp (S) gồm những điểm X có toạ độ $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ thoả măn phương trình (3.1) được gọi là *một siêu mặt bậc hai,* xác định bởi phương trình (3.1).

Phương trình (3.1) gọi là *phương trình của siêu mặt bậc hai* (S) đối với mục tiêu đã cho.

Ma trận A được gọi là *ma trận của siêu mặt bậc hai* (S) đối với mục tiêu đã cho.

Nếu $\det A \neq 0$, tức ma trận A không suy biến, thì siêu mặt bậc hai (S) gọi là *không suy biến.* Ngược lại, nếu $\det A = 0$, siêu mặt bậc hai gọi là *suy biến.*

Hai siêu phẳng bậc hai (S) và (S') với các ma trận A và A' tương ứng xem là *trùng nhau* khi và chỉ khi có số $k \in K \setminus \{0\}$ sao cho $A = kA'$.

Định lý 3.1.1. *Khái niệm siêu mặt bậc hai là một khái niệm xạ ảnh.*

Thật vậy, giả sử đối với một mục tiêu đã chọn, siêu mặt bậc hai (S) có phương trình (3.2) và phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ có biểu thức toạ độ đối với mục tiêu đó là $x' = Bx$, trong đó B là ma trận vuông cấp $n + 1$, không suy biến. Từ đó ta có $x = B^{-1}x'$. Các điểm $X = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ thuộc (S) có ảnh là điểm $X' = (x'_0 : x'_1 : ... : x'_n)$, thoả mãn điều kiện: $(B^{-1}x')^t A(B^{-1}x') = 0$ hay $(x')^t A'x' = 0$, trong đó $A' = (B^{-1})^t AB^{-1}$. Như vậy $f(S)$ cũng là một siêu mặt bậc hai, có ma trận A' đối với mục tiêu đã chọn. Chú ý rằng, vì $\det B \neq 0$, nên hạng của ma trận A' bằng hạng của ma trận A. Do đó, khái niệm suy biến hay không suy biến của siêu mặt bậc hai cũng là khái niệm xạ ảnh.

3.1.3 Giao của siêu mặt bậc hai và m - phẳng

Trong $\mathbb{P}^n$ cho siêu mặt bậc hai (S) và m - phẳng Q. Ta hãy chọn mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ sao cho $m + 1$ điểm $S_0, S_1, ..., S_m$ nằm trên Q. Khi đó phương trình của Q là:

$$x_k = 0, \quad \text{với } k = m + 1,\ m + 2, ...,\ n \tag{3.3}$$

Giả sử khi đó, phương trình của (S) là:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0 \tag{3.4}$$

Giao của Q và (S) là tập hợp (S') thoả mãn hệ phương trình (3.3) và (3.4), hay là hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_k = 0, \quad k = m + 1,\ m + 2, ...,\ n. \\ \sum_{i,j=0}^{m} a_{ij}x_i x_j = 0. \end{cases}$$

Nếu các $a_{ij},\ i,j = 0,1,...,m$ đều bằng 0 thì mọi điểm thuộc Q đều thuộc (S). Vậy: $Q \subset (S)$, hay $(S') = Q$.

Nếu các số đó không đồng thời bằng 0 thì (S') là một siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh m chiều Q.

3.1.4 Dạng chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh thực

Trong không gian xạ ảnh thực $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ đối với mục tiêu đã chọn, cho siêu mặt (S) có phương trình: $x^tAx = 0$.

Xem x^tAx như là một dạng toàn phương trong không gian vector $\mathbb{R}^{n+1}$, ta có thể tìm được phép biến đổi tuyến tính $x = \mathbb{B}x$ sao cho dạng toàn phương ấy trở thành dạng chính tắc. Lại xem phép biến đổi tuyến tính đó như là một phép biến đổi mục tiêu xạ ảnh của $\mathbb{P}^n$, ta đi đến định lý sau:

Định lý 3.1.2. *Với mỗi siêu mặt bậc hai (S) trong không gian xạ ảnh thực $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, luôn tìm được một mục tiêu xạ ảnh sao cho đối với nó phương trình của (S) có dạng chính tắc:*

$$-x_0^2 - x_1^2 - ... - x_{p-1}^2 + x_p^2 + ... + x_{p+q+1}^2 = 0$$

(có p dấu $-$ và q dấu $+$).

trong đó $1 \leqslant p+q \leqslant n+1$ và $q \geqslant p \geqslant 0$.

Mỗi siêu mặt bậc hai có đúng một dạng phương trình chính tắc.

Siêu mặt bậc hai (S) trong trường hợp đó gọi là siêu mặt bậc hai có chỉ số (p,q).

3.1.5 Phân loại siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh thực

Hai siêu mặt bậc hai (S_1) và (S_2) trong $\mathbb{P}^n$ gọi là tương đương xạ ảnh nếu có một phép biến đổi xạ ảnh biến (S_1) và (S_2). Khi đó chúng có cùng những tính chất xạ ảnh.

Định lý 3.1.3. *Hai siêu mặt bậc hai (S_1) và (S_2) trong không gian xạ ảnh thực là tương đương khi và chỉ khi phương trình chính tắc của chúng giống nhau (nói cách khác, chúng có cùng chỉ số (p,q)).*

Chứng minh. Giả sử đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$ siêu mặt (S_1) có phương trình chính tắc giống như phương trình chính tắc của siêu mặt (S_2) đối với mục tiêu $\{S_i'; E'\}$. Gọi f là phép biến đổi xạ ảnh biến mục tiêu thứ nhất thành mục tiêu thứ hai thì dễ dàng thấy rằng f sẽ biến (S_1) thành (S_2).

Ngược lại, nếu (S_1) và (S_2) tương đương xạ ảnh thì có phép biến đổi xạ ảnh f biến (S_1) thành (S_2). Chọn mục tiêu $\{S_i; E\}$ sao cho đối với nó (S_1) có phương trình dạng chính tắc và gọi

$\{S'_i; E'\}$ là ảnh của mục tiêu đó. Khi đó, hiển nhiên đối với mục tiêu mới này, phương trình của (S_2) có dạng chính tắc giống như dạng chính tắc của (S_1). $\square$

3.1.6 Phân loại xạ ảnh của các đường bậc hai trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ và $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ và tên gọi của chúng

Trong $\mathbb{P}^2$ ta có 5 loại đường bậc hai sau đây:

1)

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Nó được gọi là *đường ôvan ảo* vì nó không chứa điểm thực nào. Trong mặt phẳng (phức) mở rộng của $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ thì phương trình trên xác định một đường bậc hai không rỗng:

2)

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Nó được gọi là *đường ôvan*, hay *đường cônic.*

3)

$$x_0^2 + x_1^2 = 0.$$

Nó được gọi là cặp *đường thẳng ảo liên hợp.* Nó chỉ gồm 1 điểm thực duy nhất là điểm $(1:0:0)$.

4)

$$-x_0^2 + x_1^2 = 0.$$

Đây là cặp đường thẳng có phương trình:

$$x_0 + x_1 = 0 \quad \text{và} \quad -x_0 + x = 0.$$

5)

$$x_0^2 = 0.$$

Đây là cặp đường thẳng trùng nhau.

Trong $\mathbb{P}^3$ có 8 mặt bậc hai sau đây:

1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, gọi là *mặt trái xoan ảo.*

2) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, gọi là *mặt trái xoan.*

3) $-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, gọi là *mặt kẻ bậc hai.*

4) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, gọi là *mặt nón ảo*. Nó chỉ gồm một điểm thực duy nhất $(1 : 0 : 0 : 0)$.

5) $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, gọi là *mặt nón*.

6) $x_0^2 + x_1^2 = 0$, gọi là *cặp mặt phẳng ảo liên hợp*. Nó gồm một đường thẳng thực với phương trình là: $x_0 = 0$; $x_1 = 0$.

7) $-x_0^2 + x_1^2 = 0$. Đây là *cặp mặt phẳng* có phương trình: $x_0 + x_1 = 0$ và $-x_0 + x_1 = 0$.

8) $x_0^2 = 0$. Đây là *cặp mặt phẳng trùng nhau*.

3.1.7 Liên hệ giữa siêu mặt bậc hai xạ ảnh và siêu mặt bậc afin

Ta xét không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{S_0, S_1, ..., S_n; E\}$ và không gian afin $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus W$, trong đó W là siêu phẳng xạ ảnh $x_0 = 0$.

Giả sử (S) là một siêu mặt bậc hai trong $\mathbb{P}^n$ có phương trình đối với mục tiêu đã chọn là:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0 \tag{3.5}$$

Ta gọi $(S') = (S) \setminus W$ thì các điểm của (S') có toạ độ afin (đối với mục tiêu afin sinh bởi mục tiêu xạ ảnh đã chọn) thoả mãn phương trình:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{0i} X_i + a_{00} = 0 \tag{3.6}$$

Nếu các a_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ không đồng thời bằng 0 (tức là W không nằm trên (S) thì (S')) là một siêu mặt bậc hai afin trong không gian $\mathbb{A}^n$. Khi đó ta nói rằng *siêu mặt bậc hai xạ ảnh (S) sinh ra siêu mặt bậc hai afin (S')*.

Ngược lại, mỗi siêu mặt bậc hai afin (S') trong $\mathbb{A}^n$ đều được sinh ra bởi một siêu mặt bậc hai xạ ảnh duy nhất (S) trong $\mathbb{P}^n$.

Thật vậy, nếu (S') có phương trình (3.6) trong một mục tiêu afin của $\mathbb{A}^n$, thì bằng cách thay X_i bằng x_i/x_0 ta được phương trình (3.5) xác định cho ta một siêu mặt bậc hai xạ ảnh (S) đối với mục tiêu xạ ảnh sinh ra mục tiêu afin đã chọn.

Ta hãy lấy một điểm C nằm trên giao $S \cap W$, khi đó C có toạ độ xạ ảnh $C = (0 : c_1 : ... : c_n)$ mà

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_i c_j = 0.$$

Bởi vậy điểm vô tận C xác định phương $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ chính là phương tiệm cận của siêu mặt afin $(S') = (S) \setminus W$.

3.1.8 Đường ôvan trong mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin thực

Gọi W là một đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh thực $\mathbb{P}^2$, và $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus W$ là mặt phẳng afin thực. Ta hãy xem một đường cônic của $\mathbb{A}^2$ sẽ được sinh ra bởi đường bậc hai xạ ảnh nào trong $\mathbb{P}^2$?

Giả sử (E) là đường elip của $\mathbb{A}^2$. Khi đó, ta có thể chọn một mục tiêu afin của $\mathbb{A}^2$ sao cho phương trình của (E) có dạng: $X_1^2 + X_2^2 - 1 = 0$. Đường elip (E) được sinh ra bởi đường bậc hai xạ ảnh của $\mathbb{P}^2$, mà phương trình của nó đối với mục tiêu xạ ảnh tương ứng sẽ là: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. Đây là một đường ôvan không cắt đường thẳng vô tận W.

Giả sử (H) là một hypebol. Khi đó, ta có thể chọn một mục tiêu afin của $\mathbb{A}^2$ sao cho phương trình của (H) có dạng $X_1^2 - X_2^2 - 1 = 0$. Đường hypebol (H) được sinh ra bởi đường bậc hai xạ ảnh của $\mathbb{P}^2$, mà phương trình của nó đối với mục tiêu xạ ảnh tương ứng là: $x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$. Đây là một đường ôvan cắt đường thẳng vô tận W tại hai điểm phân biệt (đó là điểm $(0 : 1 : 1)$ và $(0 : 1 : -1)$).

Cuối cùng, ta giả sử (P) là một đường parabol của $\mathbb{A}^2$. Ta chọn mục tiêu afin để nó có phương trình: $X_1^2 - X_2 = 0$. Khi đó, nó được sinh ra bởi đường bậc hai xạ ảnh có phương trình: $x_1^2 - x_0x_2 = 0$. Đây là một đường ôvan, vì chỉ cần dùng phép đổi mục tiêu xa ảnh:

$$x_0 = x_0' + x_2', \quad x_1 = x_1', \quad x_2 = x_0' - x_2'.$$

ta đưa nó về phương trình chính tắc:

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Ngoài ra, ta nhận thấy đường ôvan ấy cắt đường vô tận W tại một điểm kép (đó là điểm $(0 : 0 : 1)$, ta còn nói rằng nó tiếp với đường vô tận W).

Tóm lại, ta đi đến kết quả sau đây:

Nếu (S) là đường ôvan trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbb{P}^2$ thì trong mặt phẳng afin $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \mathbf{W}$, tập (S) $\setminus$ W sẽ là:

- **Đường elip, nếu (S) không cắt W.**

- **Đường Hypebol, nếu (S) cắt W tại hai điểm phân biệt.**

- **Đường parabol, nếu (S) tiếp với W.**

3.2 Điểm liên hợp. Phẳng tiếp xúc. Siêu diện lớp hai

3.2.1 Điểm liên hợp

Trong $\mathbb{P}^n$ với mục tiêu đã chọn, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình $x^tAx = 0$, và hai điểm $Y = (y_0 : y_1 : ... : y_n)$, $Z = (z_0 : z_1 : ... : z_n)$.

Điểm Y gọi là liên hợp với điểm Z đối với (S) nếu $y^tAz = 0$, trong đó y và z lần lượt là ma trận cột toạ độ của điểm Y và Z.

Cố nhiên, khi đó ta cũng có $z^tAy = 0$, nên điểm Z cũng liên hợp với điểm Y đối với (S). Bởi vậy ta nói: *Hai điểm Y và Z liên hợp với nhau đối với (S).*

Rõ ràng là: *Điểm Y liên hợp với chính nó đối với (S) khi và chỉ khi Y nằm trên (S).*

3.2.2 Đinh lý

Định lý 3.2.1. *Giả sử hai điểm phân biệt Y và Z liên hợp với nhau đối với siêu mặt bậc hai (S) trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$. Khi đó:*

- *Nếu đường thẳng $\langle Y, Z\rangle$ cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N thì $[Y, Z, M, N] = -1$.*
- *Nếu $\langle Y, Z\rangle$ cắt (S) tại một điểm duy nhất thì điểm đó chính là Y hoặc Z.*

Chứng minh. Giả sử (S) có phương trình $x^tAx = 0$.

- Nếu đường thẳng YZ cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N thì $(Y) = k_1(M) + l_1(N)$ và $(Z) = k_2(M) + l_2(N)$. Vì hai điểm Y, Z liên hợp với nhau đối với (S), nên $(Y)^tA(Z) = 0$, hay:
$$[k_1(M)^t + l_1(N)^t]A[k_2(M) + l_2(N)] = 0. \tag{3.7}$$
  Chú ý rằng vì $M, N \in (S)$ nên: $(M)^tA(M) = (N)^tA(N) = 0$, do đó từ (3.7) ta suy ra: $(k_1l_2 + k_2l_1)(M)^tA(N) = 0$.

  Vì M, N là hai điểm phân biệt của (S) nên:
$$(M)^tA(N) \neq 0,$$
  suy ra
$$k_1l_2 + k_2l_1 = 0.$$
  Vậy
$$[Y, Z, M, N] = [M, N, Y, Z] = -1.$$

- Nếu YZ cắt (S) tại điểm duy nhất X thì:

$$(X) = k(Y) + l(Z) \text{ và } (X)^t A(X) = 0,$$

do đó:

$$[(Y)^t A(Y)]k^2 + 2[(Y)^t A(Z)]kl + [(Z)^t A(Z)]l^2 = 0.$$

Chú ý rằng, $(Y)^t A(Z) = 0$, ta đi đến

$$[(Y)^t A(Y)]k^2 + [(Z)^t A(Z)]l^2 = 0.$$

Vì phương trình này chỉ có một cặp nghiệm duy nhất (sai khác một hằng số nhân khác 0), nên hoặc $(Y)^t A(Y) = 0$ hoặc $(Z)^t A(Z) = 0$, tức là hoặc X trùng với Y, hoặc X trùng với Z.

□

3.2.3 Định lý

Định lý 3.2.2. *Trong $\mathbb{K}$ - không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ cho siêu mặt bậc hai (S) và điểm Y. Tập hợp tất cả những điểm liên hợp với Y đối với (S) hoặc là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n$ hoặc là toàn bộ $\mathbb{P}^n$.*

Chứng minh. Giả sử siêu mặt (S) có phương trình:

$$x^t Ax = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0.$$

và

$$Y = (y_0 : y_1 : ... : y_n).$$

Điểm $X = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ liên hợp với Y đối với (S) khi và chỉ khi:

$$y^t Ax = 0, \text{ hay } \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} = y_i x_j = 0 \text{ hay } \sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n} a_{ij} y_i) x_j = 0. \tag{3.8}$$

- Nếu hệ số của x_j trong phương trình (3.8) không đồng thời bằng 0 (hay ma trận $y^t A$ có các số hạng không đồng thời bằng 0) thì phương trình (3.8) cho ta một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n$. Siêu phẳng đó có ma trận cột toạ độ là Ay.

- Nếu các hệ số đó đều bằng 0 (hay là ma trận $y^t A$ gồm toàn số 0) thì mọi điểm X của $\mathbb{P}^n$ đều có toạ độ thoả mãn phương trình (3.8).

□

3.2.4 Siêu phẳng đối cực. Điểm kỳ dị

a. Nếu tập hợp các điểm liên hợp với điểm Y đối với siêu mặt phẳng bậc hai (S) là một siêu phẳng thì siêu phẳng đó gọi là *siêu phẳng đối cực* của điểm Y và kí hiệu là Y^*. Ngược lại, điểm Y gọi là *điểm đối cực* của siêu phẳng Y^*.

   Giả sử phương trình của (S) và toạ độ điểm Y đã cho như trong mục 3.2.3, thì siêu phẳng đối cực Y^* có phương trình (3.8).

   Nếu ta đặt F là vế phải của phương trình xác định (S) thì phương trình (3.8) có thể viết dưới dạng:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}|_Y x_j = 0,$$

   trong đó $\frac{\partial F}{\partial x_i}|_Y$ là đạo hàm riêng của F đối với biến x_j lấy tại Y.

b. Điểm Y gọi là *điểm kì dị của siêu mặt bậc hai* (S) nếu Y liên hợp với mọi điểm của $\mathbb{P}^n$ đối với (S).

   Cố nhiên, điểm kì dị của (S) phải nằm trên (S) (vì điểm kì dị liên hợp với chính nó).

   Chỉ có siêu mặt bậc hai suy biến mới có điểm kì dị.

   Thật vậy, toạ độ của điểm kì dị là nghiệm của hệ phương trình:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij}x_i = 0,\ j = 0, 1, ..., n.$$

   Bởi vậy, nếu (S) có điểm kì dị thì hệ phương trình đó có nghiệm không tầm thường, do đó, $\det A = 0$, hay (S) là suy biến.

3.2.5 Siêu phẳng tiếp xúc với siêu mặt bậc hai

Nếu điểm Y nằm trên siêu mặt bậc hai (S) nhưng không phải là điểm kì dị của (S) thì siêu phẳng đối cực Y^* của Y đối với (S) được gọi là *siêu phẳng tiếp xúc của* (S) *tại* Y, hay còn gọi là *siêu tiếp diện của* (S) *tại* Y. Rõ ràng là điểm Y nằm trên siêu phẳng Y^*. Điểm Y gọi là *tiếp điểm*.

Bất kì m - phẳng nào đi qua Y và nằm trong siêu tiếp diện Y^* của (S) tại Y đều gọi là *m - phẳng tiếp xúc của* (S) *tại* Y. Khi $m = 1$, ta có đường thẳng tiếp xúc của (S) tại Y, hay còn gọi là *tiếp tuyến của* (S) *tại* Y.

Nếu Y là điểm kì dị của (S) thì mọi m - phẳng đi qua Y $(m < n)$ đều gọi là *m - phẳng tiếp xúc với* (S) *tại* Y.

Trong mọi trường hợp, 0 - phẳng Y (tức là điểm Y) tiếp xúc với (S) khi và chỉ khi $Y \in (S)$.

3.2.6 Siêu phẳng liên hợp đối với siêu phẳng bậc hai không suy biến

Trước hết ta chú ý rằng: *Nếu siêu mặt bậc hai (S) không suy biến thì mỗi siêu phẳng bất kì đều có điểm đối cực duy nhất.*

Thật vậy, giả sử (S) có phương trình $x^tAx = 0$ với $\det A \neq 0$. Với siêu phẳng U, điểm X là đối cực của nó khi và chỉ khi $(X)^tA = (U)^t$, hay $A(X) = (U)$, do đó, $(X) = A^{-1}(U)$ được xác định duy nhất.

Định nghĩa 3.2.1. *Hai siêu phẳng U và V gọi là liên hợp với nhau đối với siêu mặt bậc hai không suy biến (S) khi hai điểm đối cực của chúng liên hợp với nhau đối với (S).*

Các tính chất:

a. **Hai siêu phẳng liên hợp với nhau đối với siêu mặt bậc hai không suy biến khi và chỉ khi siêu phẳng này đi qua điểm đối cực của siêu phẳng kia.**

   Thật vậy, cho hai siêu phẳng U, V có điểm đối cực đối với (S) lần lượt là U^*, V^*. Khi đó U liên hợp với V đối với (S) khi và chỉ khi U^* và V^* là hai điểm liên hợp đối với (S). Vì U gồm những điểm liên hợp với U^* nên U đi qua V^*. Tương tự ta có V đi qua U^*.

b. **Siêu phẳng U liên hợp với chính nó đối với siêu mặt bậc hai (S) khi và chỉ khi U tiếp xúc với (S) (tại điểm $\mathbf{U^*}$ là điểm đối cực của U).**

c. **Cho hai siêu phẳng phân biệt $\mathbf{U, V}$ liên hợp với nhau đối với siêu mặt bậc hai không suy biến (S). Nếu qua giao $\mathbf{U \cap V}$ có hai siêu phẳng phân biệt P và Q cùng tiếp xúc với (S) thì $\mathbf{[U, V, P, Q] = -1}$.**

   Thật vậy, gọi các điểm đối cực của các siêu phẳng U, V, P, Q lần lượt là U^*, V^*, P^*, Q^* ta có: $(U^*) = A^{-1}(U), (V^*) = A^{-1}(V), (P^*) = A^{-1}(P), (Q^*) = A^{-1}(Q.)$

   Vì các siêu phẳng U, V, P, Q cùng thuộc một chùm (có giá là $U \cap V$), nên: $(P) = k_1(U) + l_1(V), (Q) = k_2(U) + l_2(V)$.

   Từ đó:

$$(P^*) = A^{-1}(P) = k_1A^{-1}(U) + l_1A^{-1}(V) = k_1(U^*) + l_1(V^*).$$
$$(Q^*) = A^{-1}(Q) = k_2A^{-1}(U) + l_2A^{-1}(V) = k_2(U^*) + l_2(V^*).$$

   Vậy bốn điểm U^*, V^*, P^*, Q^* thẳng hàng. Nhưng hai điểm U^*, V^* liên hợp với nhau đối với (S) còn P^* và Q^* là giao điểm của U^*V^* với (S) nên $[U^*, V^*, P^*, Q^*] = -1$, do đó $[U, V, P, Q] = -1$.

3.2.7 Siêu diện lớp hai

Trong $\mathbb{P}^n$ với một mục tiêu đã chọn, *một siêu diện lớp hai* được định nghĩa là tập hợp (S^*) tất cả các siêu phẳng $U = (u_0 : u_1 : ... : u_n)$ mà toạ độ của chúng thoả mãn phương trình:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}u_iu_j = 0,$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ và chúng không đồng thời bằng 0.

Phương trình đó gọi là *phương trình của siêu diện lớp hai* (S^*) *đối với mục tiêu đã chọn.*

Nếu ta kí hiệu A là ma trận $(a_{ij}),\ i,j = 0,1,...,n$ thì A là ma trận vuông cấp $n+1$, đối xứng và có hạng ít nhất bằng 1. Nó gọi là *ma trận của* (S^*) *đối với mục tiêu đã chọn.*

Phương trình của (S^*) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$u^tAu = 0.$$

Nếu $\det A \neq 0$, siêu diện lớp hai (S^*) gọi là *không suy biến*, nếu $\det A = 0$, (S^*) gọi là *siêu biến.* Siêu diện lớp hai trong $\mathbb{P}^2$ còn gọi là *tuyến lớp hai.*

Ví dụ 3.2.3. *Trong* $\mathbb{P}^2$ *cho tuyến lớp hai* (S^*) *có phương trình:*

$$u_0^2 - u_2^2 + 2u_0u_1 - 2u_1u_2 = 0.$$

Ma trận của nó:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Đó là tuyến lớp hai suy biến vì $\det A = 0$.

Ta viết lại phương trình của (S^*) *dưới dạng:*

$$(u_0 + 2u_1 + u_2)(u_0 - u_2) = 0.$$

Với $u_0 + 2u_1 + u_2 = 0$, *các đường thẳng* $(u_0 : u_1 : u_2)$ *luôn luôn đi qua điểm cố định* $I = (1 : 2 : 1)$.

Với $u_0 - u_2 = 0$, *ta có các đường thẳng đi qua điểm cố định* $J = (1 : 0 : -1)$.

Như vậy, tuyến lớp hai (S^*) *đã cho là tập hợp gồm hai chùm đường thẳng có tâm* I *và* J.

3.2.8 Đối ngẫu

Trước hết ta chứng minh rằng: *Khái niệm siêu diện lớp hai là đối ngẫu của khái niệm siêu mặt bậc hai.*

Thật vậy, giả sử đã chọn trong $\mathbb{P}^n$ một mục tiêu xạ ảnh, ta xét phép đối xạ π, nó biến mỗi điểm X thành siêu phẳng $\pi(X)$ có toạ độ giống như toạ độ của X. Bây giờ giả sử (S) là một siêu mặt bậc hai nào đó trong $\mathbb{P}^n$, đối với mục tiêu đã chọn có phương trình:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0 \tag{3.9}$$

Một điểm $X = (x_0 : x_1 : ... : x_n)$ thuộc (S) khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn phương trình (3.9). Qua phép đối xạ π, điểm X được biến thành siêu phẳng U có toạ độ giống như toạ độ của X, cho nên toạ độ của U cũng thoả mãn phương trình (3.9). Như vậy qua phép đối xạ, tập (S) biến thành tập tất cả các siêu phẳng có toạ độ $(u_0 : u_1 : ... : u_n)$ thoả mãn phương trình:

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}u_iu_j = 0.$$

Nói cách khác một siêu mặt bậc hai biến thành một siêu diện lớp hai.

Từ chứng minh trên ta cũng có: siêu mặt bậc hai không suy biến và siêu diện lớp hai không suy biến là hai khái niệm đối ngẫu.

Ta có thể định nghĩa các khái niệm liên quan đến siêu diện lớp hai, đối ngẫu với các khái niệm tương ứng liên quan đến siêu mặt lớp hai. Cụ thể là:

Siêu phẳng liên hợp: Cho siêu diện lớp hai $(\mathbf{S}^*)$ có phương trình $\mathbf{u^tAu = 0}$. Hai siêu phẳng V và W gọi là liên hợp với nhau đối với $(\mathbf{S}^*)$ nếu $(\mathbf{V})^\mathbf{t}\mathbf{A}(\mathbf{W}) = \mathbf{0}$, trong đó (V) và (W) lần lượt là các ma trận cột toạ độ của V và W.

Ta có các kết quả sau đây, suy ra từ nguyên tắc đối ngẫu:

a. *Nếu hai siêu phẳng U và W liên hợp với nhau đối với siêu diện lớp hai (S^*) trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ thì:*

- **Nếu có hai siêu phẳng P và Q (cùng thực, hoặc ảo liên hợp) của $(\mathbf{S}^*)$ cùng đi qua giao $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ thì $[\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}] = -\mathbf{1}$.**

- **Nếu chỉ có một siêu phẳng duy nhất của $(\mathbf{S}^*)$ đi qua $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ thì siêu phẳng đó trùng với V hoặc W.**

b. *Cho siêu diện lớp hai (S^*) và siêu phẳng V thì:*

- **Hoặc V liên hợp với bất kì một siêu phẳng nào.** Trong trường hợp đó, ta gọi V là **siêu phẳng kì dị của $(\mathbf{S}^*)$,** nó cũng thuộc (S^*). Chỉ có siêu diện lớp hai suy biến mới có siêu phẳng kì dị.

- **Hoặc là mọi siêu phẳng liên hợp với V đều đi qua một điểm, gọi là điểm đối cực của V đối với (S*).**

c. Nếu siêu phẳng V thuộc siêu diện lớp hai (S^*) và không phải là siêu phẳng kì dị thì điểm *đối cực* V^* *của nó gọi là điểm tiếp xúc của* (S^*) *tại* V. Mọi m - phẳng $(m < n)$ nằm trong V và đi qua V^* gọi là m *- phẳng tiếp xúc tại* V.

d. Nếu (S^*) là siêu diện lớp hai không suy biến thì mọi điểm M đều có siêu phẳng đối cực M^* đối với (S^*). Hai điểm M và N gọi là *liên hợp với nhau đối với siêu diện lớp hai không suy biến* (S^*) nếu hai siêu phẳng đối cực của chúng liên hợp với nhau. Điểm M là *điểm tiếp xúc của* (S^*) *khi và chỉ khi* M *liên hợp với chính nó.*

Cho M và N là hai điểm phân biệt và liên hợp với nhau đối với siêu diện lớp hai không suy biến (S^*). *Khi đó, nếu có hai điểm tiếp xúc* P, Q *của* (S^*) *nằm trên đường thẳng* $\langle M, N\rangle$ *thì* $[M, N, P, Q] = -1$.

3.2.9 Định lý Mác - Lôranh (Mac - Laurin)

Định lý 3.2.4. ***(Định lý Mác - Lôranh):*** *Tập hợp các siêu phẳng tiếp xúc của một siêu mặt bậc hai không suy biến là một siêu diện lớp hai không suy biến. Ngược lại, mỗi siêu diện lớp hai không suy biến gồm những siêu phẳng tiếp xúc với một siêu mặt bậc hai không suy biến.*

Chứng minh. Cho siêu mặt lớp hai (S) có phương trình $x^tAx = 0$, vì nó không suy biến nên $\det A \neq 0$. Giả sử siêu phẳng U tiếp xúc với (S) tai điểm $Y = (y_0 : y_1 : ... : y_n)$ thuộc (S). Khi đó, toạ độ U là $(U) = Ay$. Vì điểm Y thuộc (S) nên $y^tAy = 0$, từ đó ta có: $y^tAA^{-1}Ay = 0$, hay $(U)^tA^{-1}(U) = 0$. Điều đó chứng tỏ rằng tập hợp các siêu tiếp diện U của (S) là siêu diện lớp hai (S^*) có ma trận là A^{-1}.

Ngược lại, cho siêu diện lớp hai không suy biến (S^*) có phương trình $u^tAu = 0$ $(\det A \neq 0)$. Ta gọi (S) là siêu mặt bậc hai có phương trình $x^tA^{-1}x = 0$. Khi đó cũng chứng minh tương tự như trên thì mỗi siêu phẳng U của (S^*) đều là siêu phẳng tiếp xúc của (S). □

Hệ quả 3.2.5. *Giả sử ta có mệnh đề* M *nào đó có liên quan đến khái niệm siêu mặt bậc hai không suy biến. Trong mệnh đề* (M^*) *đối ngẫu của* M*, cụm từ "siêu mặt bậc hai" sẽ được thay bằng cụm từ "siêu diện lớp hai". Chẳng hạn câu: " Cho hai điểm thuộc một siêu mặt bậc hai" (câu 1) sẽ trở thành " Cho hai siêu phẳng thuộc một siêu mặt lớp hai" (câu 2). Nhưng theo định lý Mác - Lôranh thì câu 2 ấy cũng có nghĩa là "Cho hai siêu phẳng tiếp xúc với một siêu mặt bậc hai" (câu 2'). Ta lại biết rằng câu 1 có thể phát biểu dưới dạng: "Cho 0 - phẳng tiếp xúc với một siêu mặt bậc hai" (câu 1'). So sánh hai câu đối ngẫu 1' và 2' ta thấy rằng từ 0 - phẳng được thay bằng* $(n-1)$ *- phẳng, các từ khác giữ nguyên.*

Một cách tổng quát, có thể nói rằng: Nguyên tắc đối ngẫu vẫn được áp dụng đối với những mệnh đề liên quan tới siêu mặt bậc hai không suy biến.

Ví dụ 3.2.6. *Trong $\mathbb{P}^2$ cặp mệnh đề sau là đối ngẫu: " Có một đường ôvan duy nhất đi qua 5 điểm cho trước, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng" và " có một đường ôvan tiếp xúc với 5 đường thẳng cho trước, trong đó không có 3 đường thẳng nào đồng quy".*

3.3 Ánh xạ xạ ảnh giữa các đường thẳng và chùm đường thẳng trong $\mathbb{P}^2$

3.3.1 Ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm

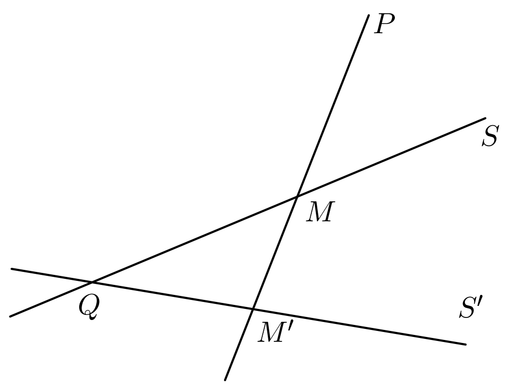
Tập hợp các điểm thuộc một đường thẳng gọi là một *hàng điểm.*

Nếu đường thẳng đó là s thì hàng điểm cũng kí hiệu là s.

Trong $\mathbb{P}^2$ cho hai đường thẳng phân biệt s và s', và một ánh xạ $f : s \to s'$ từ hàng điểm s đến hàng điểm s'. Theo định lý cơ bản của ánh xạ xạ ảnh thì: song ánh $f : s \to s'$ (xem s và s' là các không gian xạ ảnh một chiều) là một ánh xạ xạ ảnh khi và chỉ khi nó bảo tồn tỉ số kép của bốn điểm bất kì trên s.

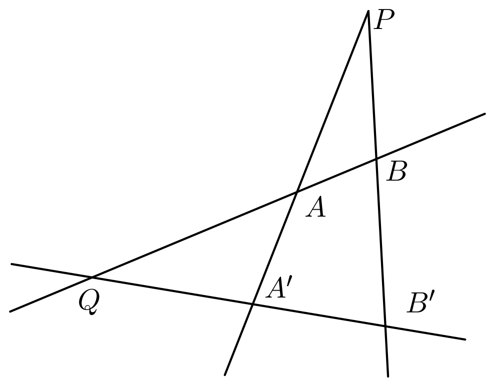
Ánh xạ xạ ảnh sẽ được xác định nếu cho biết ba điểm phân biệt A, B, C trên s và ảnh của chúng $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ trên s'. Khi đó mỗi điểm $M \in s$ sẽ có ảnh là $M' \in s'$ sao cho $[A, B, C, M] = [A', B', C', M']$.

Định nghĩa 3.3.1. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho hai đường thẳng phân biệt s và s' và một điểm P không thuộc chúng. Ánh xạ $f : s \to s'$ biến mỗi điểm $M \in s$ thành điểm $M' = s' \cap PM$ gọi là phép chiếu xuyên tâm từ s đến s', điểm P gọi là tâm của phép f.*



Rõ ràng là phép chiếu xuyên tâm là một ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm. Nếu gọi Q là giao điểm của s và s' thì hiển nhiên $f(Q) = Q$. Điểm Q gọi là *điểm tự ứng* của phép chiếu xuyên tâm f.

Định lý 3.3.1. *Ánh xạ xạ ảnh $f : s \to s'$ giữa hai hàng điểm s và s' là phép chiếu xuyên tâm khi và chỉ khi giao điểm của s và s' là điểm tự ứng.*



Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng nếu giao điểm Q của s và s' là điểm tự ứng thì f là phép chiếu xuyên tâm.

Lấy trên s hai điểm phân biệt A, B khác với Q và gọi $A' = f(A), B' = f(B), P = AA' \cap BB'$.

Giả sử $f : s \to s'$ là phép chiếu xuyên tâm với tâm P thì $f(Q) = f'(Q), f(A) = f'(A), f(B) = f'(B)$ nên f trùng với f'.

3.3.2 Ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng

Tập hợp tất cả các đường thẳng trong $\mathbb{P}^2$ cùng đi qua một điểm S được gọi là *chùm đường thẳng tâm S* và kí hiệu là $\{S\}$. Chùm đường thẳng là khái niệm đối ngẫu của khái niệm hàng điểm (trong $\mathbb{P}^2$).

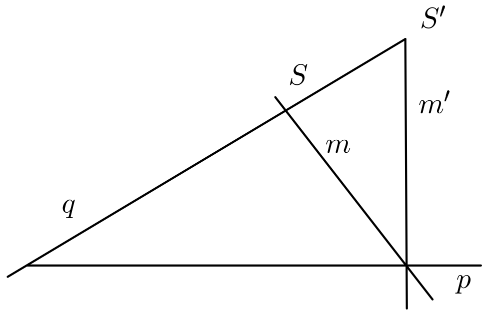
Định nghĩa 3.3.2. *Cho hai chùm đường thẳng phân biệt $\{S\}$ và $\{S'\}$ trong $\mathbb{P}^2$. Một ánh xạ $f : \{S\} \to \{S'\}$ biến một đường thẳng của $\{S\}$ thành một đường thẳng của $\{S'\}$ được gọi là một ánh xạ xạ ảnh nếu nó bảo tồn tỉ số kép của bốn đường thẳng bất kì.*

Điều đó nghĩa là nếu a, b, c, d là bốn đường thẳng đi qua S và ảnh của chúng là a', b', c', d' (đều đi qua S') thì $[a, b, c, d] = [a', b', c', d']$.

Rõ ràng là, khái niệm *"ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng"* là đối ngẫu với khái niệm *"ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm"*. Bởi vậy ta có: *Ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm được xác định khi biết ảnh của ba đường thẳng phân biệt.*

Định nghĩa 3.3.3. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho hai chùm đường thẳng phân biệt $\{S\}$ và $\{S'\}$ và một đường thẳng p không thuộc chúng (có nghĩa là p không đi qua S và không đi qua S'). Ánh xạ xạ ảnh $f : \{S\} \to \{S'\}$ biến mỗi đường thẳng $m \in \{S\}$ thành đường thẳng m' đi qua S' và $m \cap p$ được gọi là phép chiếu xuyên trục, p gọi là trục của phép chiếu f.*

Phép chiếu xuyên trục là khái niệm đối ngẫu của phép chiếu xuyên tâm. Hiển nhiên, phép chiếu xuyên trục là một ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng.



Nếu $f : \{S\} \to \{S'\}$ là phép chiếu xuyên trục thì đường thẳng $q = SS'$ biến thành chính nó. Đường thẳng q gọi là *đường thẳng tự ứng*. Ta có định lý sau đây:

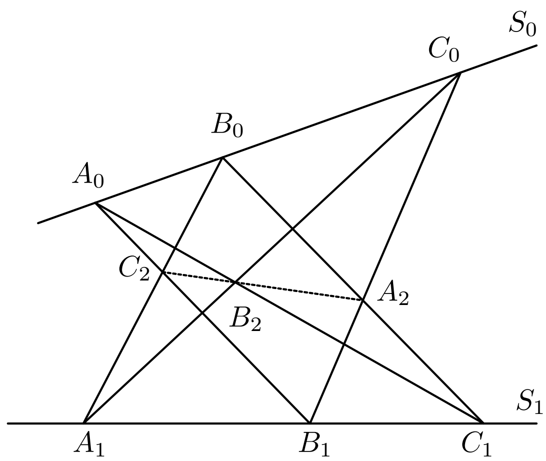
Định lý 3.3.2. *Ánh xạ xạ ảnh $f : \{S\} \to \{S'\}$ giữa hai chùm $\{S\}$ và $\{S'\}$ là phép chiếu xuyên trục khi và chỉ khi đường thẳng SS' tự ứng.*

3.3.3 Áp dụng

Sau đây ta dùng phép chiếu xuyên tâm để chứng minh định lý Papuýt.

Định lý 3.3.3. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho ba điểm phân biệt A_0, B_0, C_0 nằm trên đường thẳng S_0, ba điểm A_1, B_1, C_1 nằm trên đường thẳng S_1, sao cho 6 điểm đó đều không trùng với giao điểm của S_0 và S_1.*

Chứng minh rằng ba giao điểm $A_2 = B_0C_1 \cap B_1C_0, B_2 = C_0A_1 \cap C_1A_0$ và $C_2 = A_0B_1 \cap A_1B_0$ thẳng hàng.



Chứng minh. Gọi $h : \langle A_0, B_0\rangle \to S_0$ là phép chiếu xuyên tâm, với tâm là A_1, $g : S_0 \to C_0B_1$ là phép chiếu xuyên tâm, với tâm C_1. Khi đó: $f = g_0 f : \langle A_0, B_1\rangle \to \langle C_0, B_1\rangle$ là một ánh xạ xạ ảnh. Dễ dàng thấy rằng $f(B_1) = B_1$, suy ra f là phép chiếu xuyên tâm, cũng dễ thấy B_2 là tâm của f và f biến C_2 thành A_2. Từ đó ta kết luận: A_2, B_2, C_2 thẳng hàng. □

3.3.4 Đinh lý Stâyne (Steiner)

Định lý 3.3.4. ***(Stâyne):*** *Xét trong mặt phẳng xạ ảnh thức* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

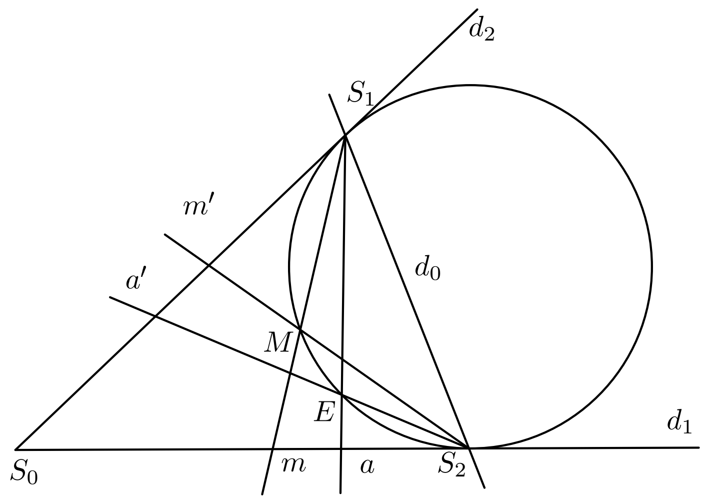
a. Cho hai điểm cố định S_1 *và* S_2 *nằm trên một đường ôvan và một điểm* M *thay đổi trên ôvan đó. Khi đó ánh xạ* $f : \{S_1\} \to \{S_2\}$ *biến đường thẳng* S_1M *thành đường thẳng* S_2M *là một ánh xạ xạ ảnh, khác phép chiếu xuyên trục (Chú ý rằng, khi* M *trùng với* S_1*, ta xem* S_1M *là tiếp tuyến của ôvan tại* S_1*, đối với* S_2 *cũng thế).*

b. Ngược lại: Cho ánh xạ xạ ảnh $f : \{S_1\} \to \{S_2\}$ *giữa hai chùm phân biệt* $\{S_1\}$ *và* $\{S_2\}$*. Nếu* f *không phải phép chiếu xuyên trục thì tập hợp giao điểm của các đường thẳng tương ứng là một đường ôvan.*

Chứng minh. a. Gọi d_0 là đường thẳng đi qua S_1 và S_2, d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của ôvan tại S_2 và $S_1, S_0 = d_1 \cap d_2$. Lấy một điểm E cố định trên ôvan và khác với S_1 và S_2. Nếu chọn $\{S_1, S_2, S_3; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh thì dễ thấy rằng phương trình của ôvan là: $x_0^2 - x_1x_2 = 0$.

Nếu điểm M nằm trên ôvan, khác với S_1 và S_2 thì toạ độ $(X_0 : x_1 : x_2)$ của nó thoả mãn phương trình đó và $x_0 \neq 0$ và do đó, $x_1 \neq 0$. Bởi vậy:

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{x_0}{x_1}$$



Nếu gọi $a = S_1E, a' = S_2E, m = S_1M, m' = S_2M$ thì dễ thấy rằng: $[d_0, d_2, a, m] = \dfrac{x_2}{x_0}, [d_1, d_0, a', m'] = \dfrac{x_0}{x_1}$.

Suy ra: $[d_0, d_2, a, m] = [d_1, d_0, a', m']$. Do đó f là ánh xạ xạ ảnh, và vì d_0 không tự ứng nên f không phải là phép chiếu xuyên trục.

b. Gọi d_0 là đường thẳng đi qua S_1 và $S_2, f(d_0) = d_1, f^{-1}(d_0) = d_2$. Vì f không phải là phép chiếu xuyên trục nên d_0 không tự ứng, do đó d_0, d_1, d_2 đôi một phân biệt. Vì vậy ba điểm $S_0 = d_1 \cap d_2, S_1, S_2$ ba điểm độc lập. Gọi a là đường thẳng của chùm $\{S_1\}$ khác với d_0 và $d_2, a' = (a)$, và $E = a \cap a'$. Ta chọn $\{S_0, S_1, S_2; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh. Với mỗi đường thẳng $m \in \{S_1\}$ và $m' = f(m) \in \{S_2\}$, ta đặt $m \cap m' = X = (x_0 : x_1 : x_2)$. Khi đó:

$$\begin{aligned} &d_0 = (1:0:0), \quad d_1 = (0:1:0), \quad d_2(0:0:1), \\ &a = (1:0:-1),\ a' = (-1:1:0),\ m = (x_2:0:-x_0), \\ &m' = (-x_1:x_0:0). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$[d_0, d_2, a, m] = \frac{x_2}{x_0} \quad \text{và} \quad [d_1, d_0, a', m'] = \frac{x_0}{x_1}.$$

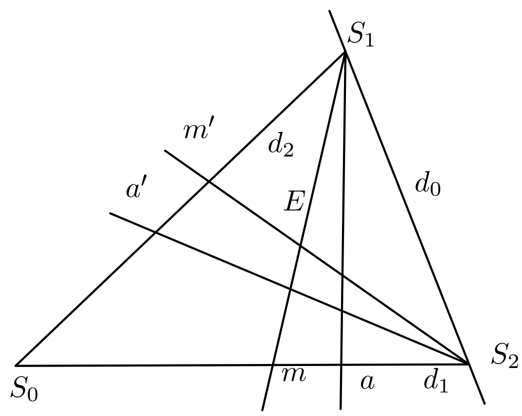
Nhưng vì f là ánh xạ xạ ảnh nên:

$$[d_0, d_2, a, m] = [d_1, d_0, a', m'].$$

Vậy:

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{x_0}{x_1} \quad \text{hay} \quad x_0^2 - x_1x_2 = 0.$$

Đó là phương trình của đường ôvan tiếp với d_1 và d_2 lần lượt tại S_2 và S_1.



□

3.3.5 Định lý đối ngẫu của định lý Stâyne

Dùng nguyên tắc đối ngẫu ta suy ra định lý sau đây là đối ngẫu của định lý Stâyne:

Định lý 3.3.5. *Xét trong mặt phẳng xạ ảnh thực* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

a. Nếu S_1 và S_2 là hai tiếp tuyến phân biệt của một ôvan và m là một tiếp tuyến thay đổi của ôvan đó. Khi đó ánh xạ $f : S_1 \to S_2$ biến điểm $S_1 \cap m$ thành $S_2 \cap m$ là một ánh xạ xạ ảnh, khác với phép chiếu xuyên tâm. (Chú ý rằng khi m trùng với S_1 thì ta xem $S_1 \cap m$ là điểm tiếp xúc của S_1 và ôvan, đối với S_2 cũng thế).

b. Ngược lại, nếu $f : S_1 \to S_2$ là ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm S_1 và S_2. Khi đó, nếu f không phải là phép chiếu xuyên tâm thì các đường thẳng nối hai điểm tương ứng sẽ tiếp với một đường ôvan. Đường ôvan đó tiếp với S_1 và S_2 lần lượt tại $f^{-1}(Q)$ và $f(Q) = S_1 \cap S_2$.

3.3.6 Cách xác định một đường ôvan trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Định lý 3.3.6. *Cho 5 điểm A, B, C, D, E, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó luôn luôn có một đường ôvan duy nhất đi qua chúng.*

Chứng minh. Xét hai chùm đường thẳng $\{A\}$ và $\{B\}$. Có phép ánh xạ xạ ảnh duy nhất $f : \{A\} \to \{B\}$ sao cho $f(AC) = BC, f(AD) = BD, f(AE) = BE$. Theo định lý đối ngẫu của định lý Stâyne, giao điểm của các đường thẳng tương ứng qua ánh xạ f nằm trên đường ôvan (S). Rõ ràng (S) đi qua 5 điểm A, B, C, D, E và (S) duy nhất. $\square$

Sau đây là các trường hợp đặc biệt của định lý trên, khi hai trong 5 điểm đó trùng nhau, cách chứng minh tương tự như trên.

Hệ quả 3.3.7. *Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và một đường thẳng a đi qua A nhưng không đi qua các điểm còn lại. Khi đó có đường ôvan duy nhất đi qua A, B, C, D và tiếp với a tại A.*

Hệ quả 3.3.8. *Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, đường thẳng a đi qua A nhưng không đi qua B và C, đường thẳng b đi qua B nhưng không đi qua A và C. Khi đó có đường ôvan duy nhất đi qua C tiếp với a và b lần lượt tại A và B.*

Và sau đây là các kết quả đối ngẫu của các kết quả trên:

Định lý 3.3.9. *Cho 5 đường thẳng a, b, c, d, e, trong đó không có 3 đường nào đồng quy. Khi đó, có một đường ôvan duy nhất tiếp với chúng.*

Hệ quả 3.3.10. *Cho 4 đường thẳng a, b, c, d, trong đó không có 3 đường nào đồng quy và một điểm A nằm trên a nhưng không nằm trên các đường còn lại. Khi đó, có đường ôvann duy nhất tiếp với a, b, c, d và đi qua A.*

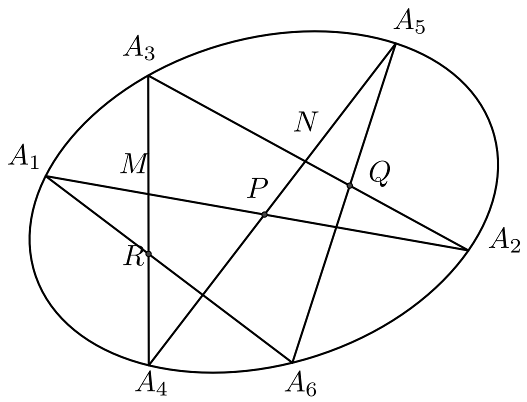
Hệ quả 3.3.11. *Cho 3 đường thẳng a, b, c không đồng quy, một điểm A nằm trên a nhưng không nằm trên b và c, một điểm B nằm trên b nhưng không nằm trên a và c. Khi đó có duy nhất một đường ôvan duy nhất tiếp với a tại A, tiếp với b tại B và tiếp với c.*

3.4 Định lý Paxcan (Paxcal) và định lý Briăngsông (Brianshon)

3.4.1 Hình sáu đỉnh và định lý Paxcan

Tập hợp gồm 6 điểm phân biệt có thứ tự $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ gọi là *một hình sáu đỉnh.* Nó được kí hiệu là $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Các điểm A_i gọi là các đỉnh của hình sáu đỉnh đó. Các đường thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ gọi là các cạnh của hình sáu đỉnh. Các cặp đỉnh A_1 và A_4, A_2 và A_5, A_3 và A_6 gọi là các cặp đỉnh đối diện. Các cặp cạnh A_1A_2 và A_4A_5, A_2A_3 và A_5A_6, A_3A_4 và A_6A_1 gọi là các cặp cạnh đối diện.

Định lý 3.4.1. ***(Định lý Paxcan)****: Nếu một hình 6 đỉnh có 6 đỉnh nằm trên một đường ôvan (còn gọi là hình 6 đỉnh nội tiếp đường ôvan đó) thì giao điểm của các cặp cạnh đối diện nằm trên một đường thẳng.*



Chứng minh. Giả sử hình 6 đỉnh $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp đường ôvan (S). Ta kí hiệu: $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$, $M = A_1A_2 \cap A_3A_4$, $N = A_2A_3 \cap A_4A_5$.

Từ định lý Stâyne đảo, ta có:

$$[A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_6] = [A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4, A_5A_6].$$

Nhưng:

$$[A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_6] = [M, A_3, A_4, R],$$
$$[A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4, A_5A_6] = [A_2, A_3, N, Q].$$

Vì vậy ta có:

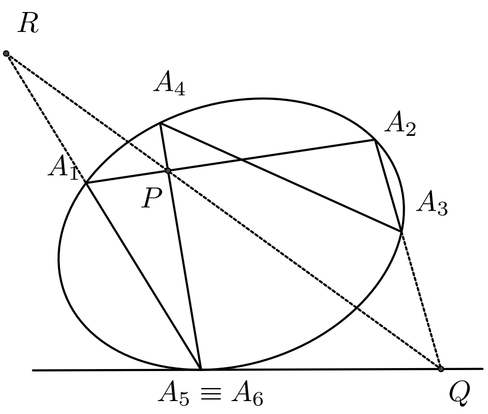
$$[M, A_3, A_4, R] = [A_2, A_3, N, Q].$$

Điều đó chứng tỏ rằng, có phép ánh xạ xạ ảnh $f : A_3A_4 \to A_3A_2$ mà $f(M) = A_2, f(A_3) = A_3, f(A_4) = N, f(Q) = R$, hơn thế, f là phép chiếu xuyên tâm vì A_3 tự ứng. Suy ra, các đường thẳng MA_2, A_4N, QR đồng quy. Nói cách khác P, Q, R thẳng hàng. □

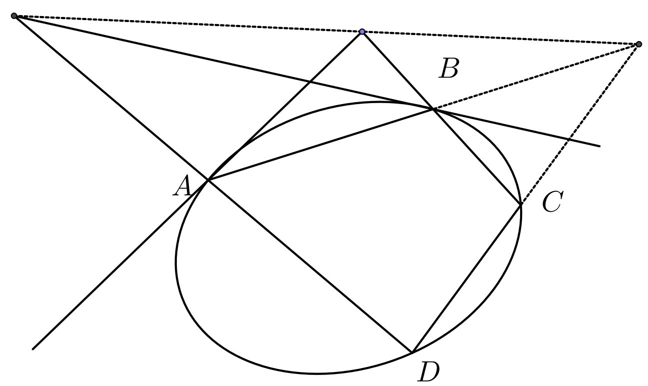
3.4.2 Các trường hợp đặc biệt của định lý Paxcan

Ta có thể định nghĩa hình năm đỉnh, hình bốn đỉnh, hình ba đỉnh tương tự như định nghĩa hình sáu đỉnh. Hãy xét một hình năm đỉnh $A_1A_2A_3A_4A_5$ nội tiếp đường ôvan (S). Ta xem hình năm đỉnh đó như là một trường hợp đặc biệt của hình sáu đỉnh khi hai đỉnh liên tiếp nào đó trùng nhau, chẳng hạn đó là hình sáu đỉnh $A_1A_2A_3A_4A_5A_5$. Khi đó lập luận trong chứng minh của định lý Paxcan vẫn đúng nếu cạnh A_5A_6 được thay bằng tiếp tuyến của ôvan tại đỉnh A_5. Vậy ta có kết quả sau đây:

Định lý 3.4.2. *Nếu hình năm đỉnh $A_1A_2A_3A_4A_5$ nội tiếp đường ôvan (S) thì ba giao điểm của: cạnh A_1A_2 với cạnh A_4A_5, cạnh A_2A_3 với tiếp tuyến của (S) tại A_5, của cạnh A_3A_4 với cạnh A_5A_1 thẳng hàng.*



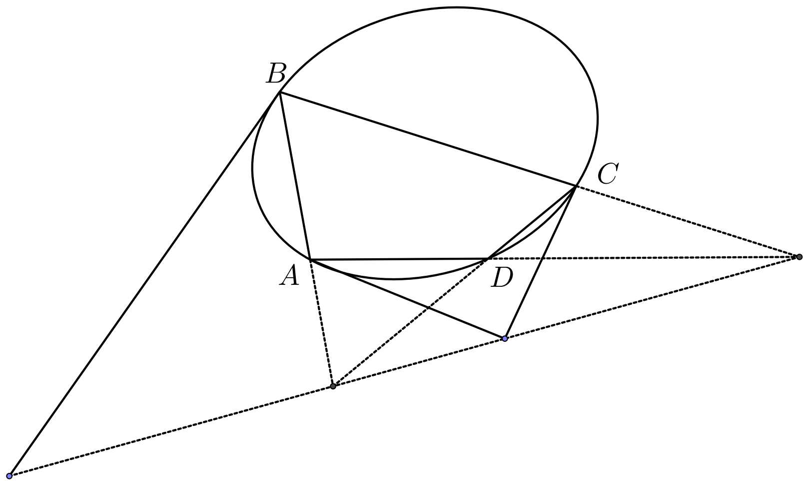
Đối với hình bốn đỉnh $ABCD$ nội tiếp ôvan (S), nếu ta xem nó là trường hợp đặc biệt của hình sau đỉnh $AABBCD$ thì sẽ có ba điểm sau đây thẳng hàng: giao điểm của tiếp tuyến tại A với cạnh BC, giao điểm hai cạnh AB và CD, giao điểm của tiếp tuyến tại B với cạnh AD.



Cũng với hình bốn đỉnh $ABCD$ nói trên, nếu ta xem nó là trường hợp đặc biệt của hình sáu đỉnh $AABCCD$ hoặc $ABBCDD$ thì sẽ được kết quả sau đây:

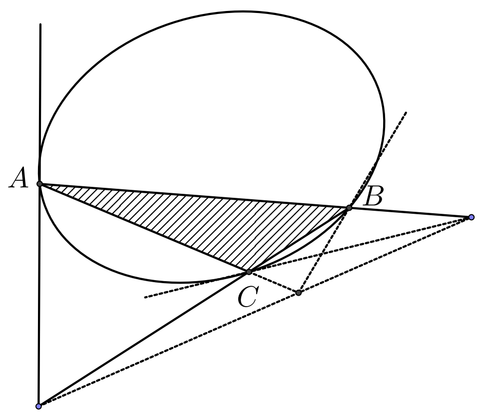
Định lý 3.4.3. *Nếu hình bốn đỉnh $ABCD$ nội tiếp một đường ôvan thì giao điểm các cặp cạnh đối diện và giao điểm các tiếp tuyến tại các cặp đỉnh đối diện là bốn điểm thẳng hàng.*

(Các cặp cạnh đối diện là: AB và CD, AD và BC các cặp đỉnh đối diện là A và C, B và D).

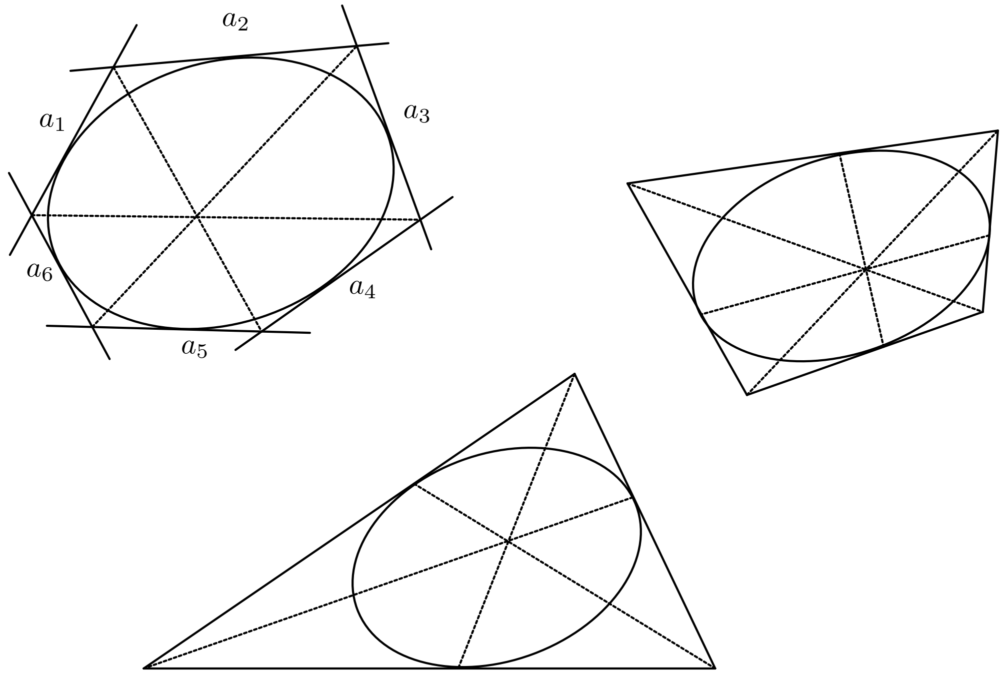


Đối với hình ba đỉnh ABC nội tiếp một đường ôvan, nếu ta xem nó là trường hợp đặc biệt của hình sáu đỉnh $AABBCC$ thì được kết quả sau đây:

Định lý 3.4.4. *Nếu một hình ba đỉnh nội tiếp một đường ôvan thì giao điểm của một cạnh với tiếp tuyến tại đỉnh đối diện là ba điểm thẳng hàng.*



3.4.3 Định lý Briăngsông (Brianshon)



Hình sáu đỉnh có đối ngẫu là *hình sáu cạnh:* Hình sáu cạnh là tập hợp có thứ tự gồm sàu đường thẳng $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Nó được kí hiệu là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$. Các đường thẳng a_i gọi là cạnh của hình sáu cạnh đó. Các giao điểm $a_1 \cap a_2$, $a_2 \cap a_3$, $a_3 \cap a_4$, $a_4 \cap a_5$, $a_5 \cap a_6$, và $a_6 \cap a_1$ gọi là *các đỉnh* của hình sáu cạnh. Các cặp cạnh a_1 và a_4, a_2 và a_5, a_3 và a_6 gọi là *các cặp cạnh đối diện.* Các cặp đỉnh $a_1 \cap a_2$ và $a_4 \cap a_5$, $a_2 \cap a_3$ và $a_5 \cap a_6$, $a_3 \cap a_4$ và $a_6 \cap a_1$ gọi là *các cặp đỉnh đối diện.* Định lý Paxcan có đối ngẫu là định lý sau đây, còn gọi là định lý Briăngsông.

Định lý 3.4.5. ***(Định lý Briăngsông):*** *Nếu một hình sáu cạnh có sáu cạnh phân biệt cùng tiếp với một đường ôvan (còn gọi là hình lục giác ngoại tiếp ôvan đó) thì các đường thẳng nối các đỉnh đối diện đồng quy.*

Các trường hợp đặc biệt của định lý Paxcan cũng có các mệnh đề đối ngẫu tương ứng, sau đây ta kể ra hai trong số các mệnh đề là đối ngẫu của các trường hợp đặc biệt của định lý Paxcan.

Định lý 3.4.6. *Nếu một hình bốn cạnh ngoại tiếp một đường ôvan thì các đường thẳng nối các đỉnh đối diện và các đường thẳng nối tiếp điểm trên các cạnh đối diện là bốn đường thẳng đồng quy.*

Định lý 3.4.7. *Nếu một hình ba cạnh ngoại tiếp một đường ôvan thì các đường thẳng nối một đỉnh với tiếp điểm trên cạnh đối diện là ba đường thẳng đồng quy.*

3.4.4 Phép biến đổi xạ ảnh của một đường ôvan

Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D nằm trên đường ôvan (S). Khi đó, từ định lý Stâyne thuận ta suy ra, nếu M là một điểm thay đổi trên (S) thì tỉ số kép $[MA, MB, MC, MD]$ có giá trị không phụ thuộc vào M. Tỉ số kép đó được gọi là tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D trên (S) và kí hiệu là $[A, B, C, D]_{(S)}$.

Một song ánh $f : (S) \to (S)$ của (S) lên chính nó được gọi là phép biến đổi của (S) nếu f bảo tồn tỉ số kép của bốn điểm bất kì trên (S).

Định lý 3.4.8. *Cho $f : (S) \to (S)$ là phép biến đổi xạ ảnh khác đồng nhất của đường ôvan (S). Khi đó, với bất kì hai điểm phân biệt M, N của (S) và ảnh của chúng $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, giao điểm của MN' và $M'N$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định.*

Chứng minh. Chọn ba điểm P, Q, R phân biệt trên (S) và gọi P', Q', R' là ảnh của chúng qua f. Khi đó áp dụng định lý Paxcan vào lục giác $PQ'RP'QR'$ ta có ba điểm $PR' \cap P'R$, $PQ' \cap P'Q$, $RQ' \cap R'Q$ cùng nằm trên một đường thẳng d. Bây giờ, gọi M là điểm bất kì trên (S) và M' là ảnh của nó thì vì f bảo tồn tỉ số kép của bốn điểm trên (S) nên $[P, Q, R, M]_{(S)} = [P', Q', R', M']_{(S)}$. Từ đó suy ra $[P'P, P'Q, P'R, P'M] = [PP', PQ', PR', PM']$ và do đó $P'M \cap PM' \in d$. Tương tự nếu N nằm trên (S) và có ảnh là N' thì $P'N \cap PN' \in d$.

Bây giờ, áp dụng định lý Paxcan cho lục giác $PM'NP'MN'$ thì ta thấy ngay giao điểm của MN' và $M'N$ nằm trên d. □

3.4.5 Định lý Frêgiê (Fresgier)

Định lý 3.4.9. ***(Định lý Frêgiê):*** *Nếu $f : (S) \to (S)$ là phép đối hợp của đường ôvan (S), khác với phép đồng nhất, thì đường thẳng nối hai điểm tương ứng bất kì luôn đi qua một điểm cố định, gọi là điểm Frêgiê của f.*

Chứng minh. Vì f là biến đổi xạ ảnh của (S) nên với hai điểm bất kì M, N của (S) và ảnh M', N' của chúng, ta có giao điểm $M'N \cap MN'$ luôn nằm trên đường thẳng d cố định. Vì f là phép đối hợp nên nếu $M' = f(M)$ thì $M = f(M')$, cho nên đối với cặp điểm M, M', ta có ảnh của chúng là cặp điểm M', M. Bởi vậy, giao điểm hai tiếp tuyến của (S) tại M và M' nằm trên d, tức là d đi qua điểm đối cực của MM'. Từ đó suy ra đường thẳng MM' đi qua điểm F là điểm đối cực của đường thẳng d. □

Định lý 3.4.10. ***(Định lý đảo):*** *Cho một điểm F cố định không nằm trên ôvan (S). Với mỗi điểm $M \in (S)$ ta lấy $M' \in (S)$ sao cho F, M, M' thẳng hàng. Khi đó, ánh xạ $f : (S) \to (S')$ mà $f(M) = M'$ là một phép biến đổi xạ ảnh đối hợp của (S).*

Chứng minh. Gọi M, N là hai điểm của (S) và $M' = f(M), N' = f(N)$. Khi đó có phép biến đổi xạ ảnh duy nhất f' sao cho $f'(M) = M', f'(N) = N', f'(M') = M$. Dễ thấy rằng, f' là phép đối hợp với điểm Frêgiê là F, và hiển nhiên f' trùng với f. □

3.5 Biến đổi xạ ảnh đối hợp của đường thẳng - Định lý Đơdác thứ hai

3.5.1 Phép biến đổi xạ ảnh đối hợp của đường thẳng

Phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ gọi là *phép biến đổi xạ ảnh đối hợp* (hoặc gọi tắt là phép đối hợp) của $\mathbb{P}^n$ nếu $f^2 = Id_{\mathbb{P}^n}$.

Các ví dụ của phép đối hợp là: Phép đồng nhất, phép thấu xạ cặp với tỉ số bằng -1.

Trong mục này chúng ta chỉ xét các phép đối hợp của đường thẳng xạ ảnh.

Định lý 3.5.1. *Cho s là đường thẳng $\mathbb{P}^n$. Phép biến đổi xạ ảnh khác đồng nhất $f : s \to s$ là phép đối hợp của s khi và chỉ khi có hai điểm phân biệt M và M' sao cho $M' = f(M)$ và $M = f(M')$.*

Chứng minh. Nếu f là phép đối hợp khác đồng nhất của s thì hiển nhiên có cặp điểm M, M' như thế.

Ngược lại, giả sử f là biến đổi xạ ảnh của s và có M, M' sao cho $M = f(M')$ và $M' = f(M)$. Với mọi điểm $N \in s \setminus M$ ta gọi $N' = f(N)$ và $N'' = f(N')$ thì ta có $[M, M', N, N'] = [M', M, N', N''] = [M, M', N'', N']$. Suy ra $N'' \equiv N$, vậy f là phép đối hợp. □

3.5.2 Điểm bất động của phép đối hợp

Định lý 3.5.2. *Cho phép đối hợp $f : s \to s$ của đường thẳng s khác với phép đồng nhất. Nếu f có một điểm bất động P thì nó còn có một và chỉ một điểm bất động nữa Q khác P, và nếu điểm M của s có ảnh M' khác M thì $[P, Q, M, M'] = -1$.*

Chứng minh. Vì f không phải là phép đồng nhất nên có điểm A khác với ảnh $A' = f(A)$. Điểm $X \in s$ là điểm bất động của f khi và chỉ khi $[A, A', P, X] = [A', A, P, X]$, tức là khi và chỉ khi

$$[A, A', P, X] = \frac{1}{[A, A', P, X]} \text{ hay } [A, A', P, X] = \pm 1.$$

Nếu $[A, A', P, X] = 1$ thì X chính là điểm P. Nếu $[A, A', P, X] = -1$, thì ta gọi X là Q, là điểm bất động thứ hai. Không thể có điểm bất động thứ ba vì f khác phép đồng nhất.

Bây giờ gọi M là điểm bất kì của s và $M' = f(M)$ khác M thì $[P, Q, M, M'] = [P, Q, M', M]$, nên $[P, Q, M, M'] = -1$. □

Hệ quả 3.5.3. *Nếu $f : s \to s$ là phép đối hợp khác đồng nhất của đường thẳng s thì hoặc f không có điểm bất động nào hoặc có đúng hai điểm bất động.*

Nếu f không có điểm bất động thì ta gọi nó là *phép đối hợp eliptic.*

Nếu f có hai điểm bất động thì ta gọi nó là *phép đối hợp hypebolic.*

3.5.3 Xác định một phép đối hợp

Định lý 3.5.4. *Một phép đối hợp f khác phép đồng nhất của đường thẳng s được xác định nếu cho hai điểm phân biệt A, B thuộc s và ảnh A', B' của chúng.*

Chứng minh. Nếu $A' \equiv A$ và $B' \equiv B$ thì f là phép đối hợp hypebolic nên ảnh của điểm M là điểm M' sao cho $[A, B, M, M'] = -1$. Vậy M' được xác định.

Nếu một trong hai điểm A, B không bất động, chẳng hạn, nếu A không trùng A', thì có phép biến đổi xạ ảnh duy nhất của s biến A thành A', biến A' thành A và biến B thành B'. Đó chính là phép đối hợp f đã cho. □

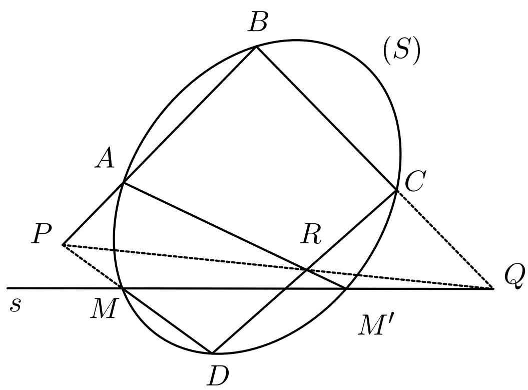
3.5.4 Chùm đường bậc hai. Định lý Đơdác thứ hai

Trong $\mathbb{P}^2$ cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Tập hợp các đường bậc hai đi qua bốn điểm đó gọi là *một chùm đường bậc hai,* kí hiệu là $S(A, B, C, D)$, Bốn điểm A, B, C, D gọi là *cơ sở* của chùm.

Trong đó các đường bậc hai của chùm $S(A, B, C, D)$ có 3 đường bậc hai suy biến thành các cặp đường thẳng. Đó là các cặp đường thẳng: AB và CD, AC và BD, AD và BC. Ngoài ra các đường bậc hai khác đều là đường ôvan.

Rõ ràng là nếu điểm E không trùng với một trong các điểm A, B, C, D thì có một đường bậc hai duy nhất của chùm đi qua E.

Định lý 3.5.5. ***(Đinhl lý Đơdác thứ hai):*** *Trong $\mathbb{P}^2$ cho một chùm đường bậc hai $S(A, B, C, D)$ và đường thẳng s không đi qua A, B, C, D. Khi đó mỗi đường bậc hai của chùm sẽ cắt s theo một cặp điểm tương ứng với nhau trong một phép đối hợp xác định của s.*



Chứng minh. Giả sử (S) là một đường bậc hai nào đó của chùm, tức là (S) đi qua A, B, C, D. Ta gọi M và M' là giao điểm của (S) và s thì ta có lục giác $ABCDMM'$ nối tiếp (S). Theo đinhl lý Paxcan, ba điểm $P = AB \cap DM$, $Q = BC \cap MM'$, $R = CD \cap M'A$ thẳng hàng.

Gọi:

$f_1 : s \to AB$ là phép chiếu xuyên tâm, với tâm D.

$f_2 : AB \to CD$ là phép chiếu xuyên tâm, với tâm Q.

$f_3 : CD \to s$ là phép chiếu xuyên tâm, với tâm A.

Khi đó tích $f = f_{30}F_{20}f_1 : s \to s$ là phép biến đổi xạ ảnh của s biến M thành M'.

Nếu (S) là đường bậc hai của chùm, nhưng không phải là đường ôvan, chẳng hạn (S) là cặp đường thẳng AB và CD và (S) cắt s tại N và N', thì cũng dễ thấy rằng $f(N) = N'$. Ngoài ra, hiển nhiên f là phép đối hợp. □

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài tập 3.1. *Trong mặt phẳng xạ ảnh thực $\mathbb{P}^2$ cho mục tiêu $\{S_0, S_1, S_2; E\}$. Viết phương trình các đường bậc hai trong mỗi trường hợp dưới đây:*

a. Đi qua ba điểm S_0, S_1, S_2.

b. Đi qua bốn điểm S_0, S_1, S_2, E.

c. Đi qua năm điểm s_0, S_1, S_2, E và $A = (1 : 1 : -1)$.

d. Đi qua năm điểm $(0 : 0 : 1,)$; $(0 : 1 : 1)$, $(1 : 0 : 1)$, $(2 : -5 : 1)$, $(-5 : 2 : 1)$.

Bài tập 3.2. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho phương trình của bốn đường thẳng phân biệt: đường thẳng l_i có phương trình:*

$$F_i = a_{0i}x_0 + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 = 0,\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Chứng minh rằng, đường bậc hai (S) đi qua giao điểm của l_1 và l_2, l_2 là l_3, l_3 và l_4, l_4 và l_1 có phương trình: $kF_1F_3 + lF_2F_4 = 0$, trong đó k và l là hai số không đồng thời bằng 0.

Áp dụng kết quả đó để giải các bài tập b, c, d của bài 1.

Bài tập 3.3. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho hai đường bậc hai (S) và (S') cắt nhau tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Giả sử đối với một mục tiêu nào đó (S) và (S') lần lượt có phương trình $x^tAx = 0$, và $x^tA'x = 0$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một đường bậc hai đi qua A, B, C, D là phương trình của nó có dạng: $k(x^tAx) + l(x^tA'x) = 0$, trong đó k và l là hai số không đồng thời bằng 0.*

Bài tập 3.4. *Chứng minh rằng mặt kẻ bậc hai trong $\mathbb{P}^3$:*

$-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ *có chứa những đường thẳng.*

Bài tập 3.5. *Trong $\mathbb{P}^n$ với mục tiêu $\{S_i; E\}$ cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:*

$$-x_0^2 - x_1^2 - ... - x_{p-1}^2 + x_p^2 + ... + x_{p+q-1}^2 = 0 \text{ với } q \geqslant p > 0 \text{ và } p + q < n + 1.$$

a. Gọi Q là $(n-p-q)$ - phẳng đi qua $n-p-q+1$ đỉnh $S_{p+q}, S_{p+q+1}, ..., S_n$. Chứng minh rằng Q chứa trong (S).

b. Cho A là một điểm bất kì của (S) nhưng không nằm trên Q. Chứng minh rằng $(n-p-q+1)$ - phẳng đi qua Q và A cũng chứa trong (S).

Chính vì các tính chất a, b mà người ta gọi mặt (S) như thế là siêu nón với phẳng đỉnh Q.

c. Kể ra những mặt nón có phương trình chính tắc trong $\mathbb{P}^2$ và $\mathbb{P}^3$.

Bài tập 3.6. *Gọi tên các đường bậc hai sau đây trong $\mathbb{P}^2$:*

a. $2x_1^2 + 4x_2^2 - x_0^2 + 2x_0x_2 + 5x_0x_1 + 3x_1x_2 = 0.$

b. $x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0.$

c. $4x_0^2 + 15x_1^2 - 5x_2^2 - 22x_1x_2 - 8x_0x_2 + 16x_0x_1 = 0.$

d. $2x_0^2 + 6x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_1x_2 + 6x_0x_2 - 4x_0x_1 = 0.$

Bài tập 3.7. *Trong $\mathbb{P}^3$, cho mặt phẳng W và xây dựng không gian afin $\mathbb{A}^3 = \mathbb{P}^3 \setminus W$.*

a. Chứng minh rằng, nếu (S) là mặt trái xoan trong $\mathbb{P}^3$ thì $(S) \setminus W$ sẽ là các mặt sau đây trong $\mathbb{A}^3$.

- *Elipxôit nếu (S) không cắt W.*
- *Hypebolôit hai tầng nếu (S) cắt W theo một đường ôvan.*
- *Parabolôit eliptic nếu (S) chỉ cắt W tại một điểm (ta nói (S) tiếp với W).*

b. Nếu (S) là mặt kẻ thì $(S) \setminus W$ sẽ là các mặt sau đây trong $\mathbb{A}^3$:

- *Hypebolôit một tầng nếu (S) cắt W theo đường ôvan.*
- *Mặt yên ngựa nếu (S) cắt W theo cặp đường thẳng.*

Bài tập 3.8. *Đối với mục tiêu đã chọn trong $\mathbb{P}^2$, cho ôvan có phương trình: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.*

Chứng minh rằng ba đỉnh của mục tiêu đôi một liên hợp với nhau đối với ôvan đó.

Bài tập 3.9. *Trong $\mathbb{P}^n$ cho mục tiêu $\{S_i; E\}$. Viết phương trình các siêu mặt bậc hai (S) sao cho S_i và S_j $(i \neq j)$ liên hợp với nhau đối với (S).*

Bài tập 3.10. *Trong $\mathbb{P}^2$ với mục tiêu $\{S_i; E\}$ cho đường bậc hai (S) có phương trình: $-x_0^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$.*

a. Chứng minh rằng hai điểm: $A = (1:0:0)$ và $B = (1:1:0)$ liên hợp với nhau đối với (S).

b. Tìm toạ độ điểm C liên hợp với cả A và B.

c. Viết phương trình của (S) trong mục tiêu $\{S_1', S_2', S_3'; E\}$, trong đó $S_1' \equiv A, S_2' \equiv B$ và $S_3' \equiv C$.

Bài tập 3.11. *Chứng minh rằng nếu trong $\mathbb{P}^n$ cho siêu mặt bậc hai (S) thì luôn luôn tìm được $n+1$ điểm độc lập S_i, $i = 0, 1, ..., n$ sao cho S_i và S_j $(i \neq j)$ liên hợp với nhau.*

Bài tập 3.12. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho đường bậc hai (S) và ba điểm A, B, C không thẳng hàng và đôi một liên hợp với nhau đối với (S). Một đường thẳng m cắt các đường thẳng AB, BC, CA lần lượt tại P, Q, R. Gọi P', Q', R' là các điểm lần lượt nằm trên AB, BC, CA và lần lượt liên hợp với P, Q, R đối với (S). Chứng minh ba đường thẳng AQ', BR', CP' đồng quy.*

Bài tập 3.13. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho ôvan (S), ba điểm độc lập A, B, C và ba điểm độc lập A', B', C' sao cho các đường thẳng $B'C', C'A', A'B'$ lần lượt là đường thẳng đối cực của A, B, C đối với (S). Chứng minh:*

a. Các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là đối cực của A', B', C' đối với (S).

b. Các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Bài tập 3.14. *Chứng minh rằng, nếu hình bốn đỉnh toàn phần có 4 đỉnh nằm trên một ôvan thì ba điểm chéo của nó đôi một liên hợp với nhau đối với ôvan đó.*

Từ đó suy ra cách dựng đường thẳng đối cực của một điểm đối với một ôvan cho trước cũng như cách dựng tiếp tuyến của ôvan từ một điểm (chỉ dùng thước thẳng).

Bài tập 3.15. *Chứng minh rằng, điều kiện cần và đủ để đường thẳng d là tiếp tuyến của siêu mặt bậc hai (S) tại điểm M hoặc $d \subset (S)$, hoặc $d \cap (S) = \{M\}$.*

Bài tập 3.16. *Cho điểm A không nằm trên siêu mặt bậc hai (S) không suy biến, A^* là siêu phẳng đối cực của A đối với (S). Chứng minh rằng, đường thẳng d đi qua A là tiếp tuyến của (S) khi và chỉ khi d còn đi qua một điểm thuộc $(S) \cap A^*$.*

Bài tập 3.17. *Trong $\mathbb{P}^n$ cho siêu mặt bậc hai (S) và điểm $O \notin (S)$. Gọi $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ là phép thấu xạ đơn có tâm O, biến (S) thành chính nó. Chứng minh rằng, f là thấu xạ đối hợp và cơ sở của nó là siêu phẳng đối cực của điểm O đối với (S).*

Bài tập 3.18. *Chứng minh rằng, mọi mặt phẳng tiếp xúc của một mặt kẻ (trong $\mathbb{P}^3$) đều cắt mặt kẻ đó theo một đường thẳng.*

Bài tập 3.19. *Trong $\mathbb{P}^3$ cho mặt bậc hai (S) có phương trình:*

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 - 2x_0x_3 + 2x_1x_2 = 0.$$

a. Tìm điểm kì dị của (S). Chứng tỏ rằng đó là một mặt nón.

b. Tìm phương trình mặt phẳng đối cực π của điểm $(1:0:0:0)$ đối với (S).

c. Giao $(S) \cap \pi$ là đường gì?

d. Đưa phương trình của (S) về dạng chính tắc.

Bài tập 3.20. *Trong $\mathbb{P}^3$ cho mặt bậc hai (S) có phương trinhg:*

$$2x_0^2 - 3x_1^2 - x_3^2 - x_0x_1 + 2x_0x_2 - x_0x_3 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

a. Tìm điểm kì dị của (S).

b. Chứng tỏ rằng, (S) là cặp mặt phẳng, tìm phương trình của các mặt đó.

Bài tập 3.21. *Xét mô hình xạ ảnh của không gain afin $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n \setminus W$. Cho siêu mặt bậc hai xạ ảnh (S), sinh ra siêu mặt bậc hai afin $(S') = (S) \setminus W$. Chứng minh rằng:*

a. Điểm I là tâm của (S') khi và chỉ khi I liên hợp với mọi điểm của W đối với (S). Từ đó suy ra, nếu (S) không suy biến và không tiếp xúc với W thì (S') có tâm duy nhất, đó là điểm đối cực của siêu phẳng W đối với (S).

b. Nếu C là điểm nằm trên W và γ là siêu phẳng đối cực của C đối với (S) thì $\gamma \setminus W$ là siêu phẳng kính của (S') liên hợp với phương $\overrightarrow{c}$, xác định bởi điểm vô tận C.

Bài tập 3.22. *Trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ cho ôvan (S) và đường thẳng a. Gọi O là điểm đối cực của a đối với (S). Nếu cho a là đường thẳng vô tận của mặt phẳng afin $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus a$ thì ôvan (S) trở thành đường gì trong $\mathbb{A}^2$, điểm O là điểm gì đối với đường đó? (xét các trường hợp a cắt, không cắt, và tiếp với (S)).*

Bài tập 3.23. *Dùng mô hình xạ ảnh của mặt afin, hãy giải các bài toán sau đây của hình học afin:*

a. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành nội tiếp, hoặc ngoại tiếp một đường elip hoặc hypebol thì tâm của nó trùng với tâm của elip hoặc hypebol đó.

b. Tìm quỹ tích trung điểm các dây cung song song với nhau của một cônic đã cho.

c. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng cắt một hypebol tại hai điểm A, B và cắt hai đường tiệm cận của hypebol đó tại C, D thì $AC = BD$.

d. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành có hai đỉnh đối diện nằm trên một hypebol và các cạnh song song với các đường tiệm cận của hypebol đó thì hai đỉnh kia của hình bình hành thẳng hàng với tâm của hypebol.

e. Chứng minh rằng nếu hai tiếp tuyến tại hai điểm A và B của một parabol cắt nhau tại C, thì đường thẳng nố C với trung điểm AB sẽ song song với trục của parabol.

Bài tập 3.24. *Phát biểu bài toán đối ngẫu của các bài tập 3.11, 3.12 (trong đó thêm giả thiết là siêu mặt bậc hai (S) không suy biến) và các bài tập 3.13, 3.14.*

Các bài tập sau đây đều xét trong mặt phẳng xạ ảnh thực.

Bài tập 3.25. *Cho hai đường thẳng cố định a, b và ba điểm phân biệt P, Q, R cố định không nằm trên chúng. Một đường thẳng thay đổi đi qua P và cắt a và b lần lượt tại A và B. Tìm quỹ tích giao điểm của QB và RA, của QA và RB (xét trường hợp: P, Q, R thẳng hàng và không thẳng hàng).*

Phát biểu bài toán đối ngẫu.

Bài tập 3.26. *Cho đường ôvan (S) và hai điểm A, B cố định trên nó, một đường thẳng d cố định không đi qua A và B. Với mỗi điểm M thay đổi trên (S), các đường thẳng AM và BM lần lượt cắt d tại A' và B'. Tìm quỹ tích giao điểm của AB và $A'B'$.*

Phát biểu bài toán đối ngẫu.

Cho đường thẳng AB là đường thẳng vô tận, hãy suy từ bài toán trên thành bài toán trong mặt phẳng afin.

Bài tập 3.27. *Cho đường ôvan (S) và hai điểm A, B cố định trên nó, một đường thẳng d cố định không đi qua A và B. Với mỗi điểm M thay đổi trên d, các đường thẳng AM, BM lần lượt cắt (S) tại A' và B'. Tìm quỹ tích giao điểm của AB' và $A'B$.*

Phát biểu bài toán đối ngẫu.

Cho đường thẳng AB là đường thẳng vô tận, hãy suy từ bài toán trên thành bài toán afin.

Bài tập 3.28. *Chứng minh rằng, nếu hai hình bốn đỉnh toàn phần có cùng chung ba điểm chéo thì 8 đỉnh của chúng nằm trên một đường bậc hai.*

Bài tập 3.29. *Cho 3 điểm không thẳng hàng O, A, B và một đường thẳng d không đi qua A và B. Một điểm M thay đổi trên d. Gọi $R = AM \cap OB, S = BM \cap OA$. Tìm tập hợp các đường thẳng RS.*

Bài tập 3.30. *Cho 3 đường thẳng d, d', a không đồng quy và một điểm O không nằm trên chúng. Một đường thẳng thay đổi đi qua O cắt $d.d'$ và a lần lượt tại M, M', I. Gọi J là điểm mà $[M, M'I, J] = -1$. Tìm quỹ tích điểm J.*

Xem a là đường thẳng vô tận thì được kết quả gì của hình học afin?

Bài tập 3.31. *Cho đường ôvan (S), đường thẳng d và hai điểm cố định A, B. Hai điểm thay đổi M, M' trên d và liên hợp với nhau đối với (S). Tìm quỹ tích giao điểm của AM và BM'.*

Xem d la fđường thẳng vô tận thì được kết quả gì của hình học afin?

Bài tập 3.32. *Giải các bài toán dựng hình sau đây trong $\mathbb{P}^2$, chỉ dùng thước thẳng: Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.*

a. *Dựng giao điểm của một đường thẳng a đi qua A và đường ôvan (S) đi qua 5 điểm đó.*

b. *Dựng tiếp tuyến tại A của đường ôvan (S) nói trên.*

c. *Dựng đường thẳng đối cực của một điểm F đối với (S).*

Bài tập 3.33. *Gọi (S) là đường ôvan thay đổi đi qua 4 điểm A, B, C, D cho trước. Tìm quỹ tích giao điểm các tiếp tuyến của (S) tại hai trong bốn điểm đó.*

Phát biểu kết quả đối ngẫu.

Bài tập 3.34. *Trong $\mathbb{P}^2$ cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ thoả mãn điều kiện của định lý Đơdác (nghĩa là các đường thẳng $AA' < BB', CC'$ đồng quy). Chứng minh rằng, 6 giao điểm sau đây nằm trên một đường bậc hai: $AB \cap B'C'$, $AB \cap C'A'$, $BC \cap A'B'$, $BC \cap C'A'$, $CA \cap A'B'$, $CA \cap B'C'$.*

Bài tập 3.35. *Trong mặt phẳng afin cho hypebol (H) với hai đường tiệm cận a và b. Cho 4 điểm A, B, C, D nằm trên (H). Gọi a' là đường thẳng đi qua A và song song với a, b' là đường thẳng đi qua B và song song với b. Đường thẳng AC cắt b' tại P, đường thẳng BD cắt a' tại Q. Chứng minh rằng $PQ \,//\, CD$.*

Bài tập 3.36. *Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC. Một parabol thay đổi luôn luôn tiếp xúc với ba đường thẳng AB, BC, CA. Gọi P, Q, R là các điểm tiếp xúc lần lượt nằm trên AB, BC, CA. Chứng minh:*

a. *Mỗi đường thẳng RP, PQ, QR đều đi qua một điểm cố định.*

b. *Các đường thẳng AQ, BR, CP đồng quy.*

Bài tập 3.37. *Chứng minh rằng, nếu hai tam giác cùng nội tiếp một đường ôvan thì cùng ngoại tiếp một đường ôvan.*

Bài tập 3.38. *Cho một đường ôvan (S) thay đổi đi qua 4 điểm cố định A, B, C, D. Tiếp tuyến của (S) tại B cắt AC tại B', tiếp tuyến của (S) tại C cắt BD tại C'. Chứng minh rằng, đường thẳng $B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.*

Phát biểu kết quả đối ngẫu.

Bài tập 3.39. *Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên đường ôvan (S) và K là điểm cố định không nằm trên (S). Các đường thẳng KA, KB, KC cắt (S) tại A', B', C'. Với điểm P thay đổi trên (S), các đường thẳng PA, PB, PC lần lượt cắt $B'C', C'A', A'B'$ tại A'', B'', C''. Chứng minh rằng, các điểm A'', B'', C'' nằm trên một đường thẳng và đường thẳng này đi qua một điểm cố định.*

Bài tập 3.40. *Cho 4 điểm A, B, C, D nằm trên đường ôvan (S). Gọi a, b là các tiếp tuyến của (S) tại A và $B, M = AC \cap b, M' = BC \cap a, N = AD \cap b, N' = BD \cap a$.*

a. *Chứng minh rằng, các đường thẳng $AB, CD, M'N, MN'$ đồng quy.*

b. *Gọi O là giao điểm của a và b. Chứng minh:$[O, B, M, N] = [A, O, M', N']$.*

   Phát biểu các kết quả đối ngẫu.

Bài tập 3.41. *Cho ôvan (S) và 2 điểm I, J trê nó. Lấy hai điểm A, B lần lượt nằm trên tiếp tuyến của (S) tại I và J. Vẽ AC và BD tiếp xúc với (S) lần lượt tại C và D. Kí hiệu $P = ID \cap AC, Q = JC \cap BD$. Chứng minh $PQ \cap AB \in IJ$.*

Phát biểu kết quả đối ngẫu.

Bài tập 3.42. *Cho 2 điểm A, B cố định trên ôvan (S) và một điểm F không thuộc (S). Một đường thẳng thay đổi đi qua F cắt (S) tại M và N. Tìm quỹ tích giao điểm của AM và BN, của AN và BM.*

Phát biểu kết quả đối ngẫu.

Bài tập 3.43. *Cho phép đối hợp f_1 và f_2 của (S) với các điểm Frêgiê tương ứng là F_1 và F_2. Chứng minh rằng, $f_{1}{}_0 f_2 = F_{2}{}_0 F_1$ khi và chỉ khi F_1 và F_2 liên hợp với nhau đối với (S).*

Bài tập 3.44. *Trên ba đường thẳng không đồng quy a, b, c lần lượt lấy ba điểm A, B, C. Gọi $f_1 : a \to b$ là phép chiếu xuyên tâm, với tâm C; $f_2 : b \to c$ là phép chiếu xuyên tâm, với tâm A; $f_3 : c \to a$ là phép chiếu xuyên tâm với tâm B. Chứng minh rằng tích $f_{3}{}_0 f_{2}{}_0 f_1$ là một phép đối hợp của đường thẳng a.*

Bài tập 3.45. *Trên đường thẳng s cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_0 S_1; E\}$ mỗi phép biến đổi xạ ảnh $f : s \to s$ có biểu thức toạ độ: $x'_0 = ax_0 + bx_1$, $x'_1 = cx_0$, trong đó $ad - bc \neq 0$. Tìm điều kiện của các hệ số a, b, c, d sao cho:*

- *f là phép đồng nhất.*
- *f là phép đối hợp.*
- *f là phép đối hợp eliptic.*
- *f là phép đối hợp hypebolic.*

Bài tập 3.46. *Trên đường thẳng s với mục tiêu xạ ảnh đã chọn cho các điểm $A = (1 : 2)$, $A' = (1 : 3)$, $B = (1 : 4)$, $B' = (1 : 5)$.*

a. *Viết biểu thức toạ độ của phép đối hợp biến A thành A', biến B thành B'.*

b. *Tìm toạ độ các điểm P, Q của s sao cho $[P, Q, A, A'] = [P, Q, B, B']$.*

Bài tập 3.47. *Cho 4 điểm* A, B, C, D *của đường thẳng* d *sao cho* $[A, B, C, D] = -1$. *Gọi* $f : d \to d$ *là phép biến đổi xạ ảnh sao cho* $f(A) = C$, $f(C) = B$, $f(B) = D$. *Chứng minh rằng* f^2 *là phép đối hợp.*

Bài tập 3.48. *Cho 4 điểm* A, A', B, B' *trên đường thẳng* s *và* $f : s \to s$ *là phép đối hợp mà* $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. *Chứng minh rằng, nếu* f *là phép eliptic thì* $[A, A', B, B'] < 0$, *là phép hypebolic thì* $[A, A', B, B'] > 0$.

Bài tập 3.49. *Cho 2 đường ôvan cắt nhau tại bốn điểm phân biệt* A, B, C, D. *Một đường thẳng* d *tiếp với hai ôvan đó tại các điểm* P *và* Q. *Chứng minh rằng, nếu* M *và* M' *là giao điểm của* AB *và* CD *với* d *thì* $[P, Q, M, M'] = -1$.

Phát biểu bài toán đối ngẫu.

Bài tập 3.50. *Cho 4 điểm phân biệt nằm trên một đường ôvan. Gọi* $P = AB \cap CD$. *Đường thẳng* d *đi qua* P *và tiếp với ôvan tại* Q, *cắt* AD, BC *lần lượt tại* M *và* M'. *Tìm tỉ số kép* $[P, Q, M, M']$.

Bài tập 3.51. *Cho 4 đường ôvan khác nhau của một chùm đường bậc hai. Giả sử điểm* M *có 4 đường đối cực phân biệt đối với 4 ôvan đó. Chứng minh rằng 4 đường thẳng đó đồng quy và tỉ số kép của chúng không phụ thuộc vào điểm* M.

Bài tập 3.52. *Giải bài toán afin: Cho* I *là trung điểm dây cung* PQ *của đường elip* (E). *Qua* I *vẽ hai dây cung* AB *và* CD. *Gọi* M, N *lần lượt là giao điểm của* AD *và* BC *với* PQ. *Chứng minh rằng* $IM = IN$.

Bài tập 3.53. *Xét họ đường bậc hai tiếp với hai đường thẳng* a *và* b *lần lượt tại hai điểm cố định* A *và* B. *Chứng minh rằng, chúng cắt một đường thẳng* c *không đi qua* A *và* B *tại các cặp điểm tương ứng với nhau trong một phép đối hợp của* c.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Văn Như Cương, *Hình học xạ ảnh,* NXB Giáo dục 1999.

[2] Văn Như Cương- Hoàng Trọng Thái, *Bài tập hình học cao cấp,* NXB Đại học sư phạm.

[3] Nguyễn Mộng Hy, *Hình học cao cấp,* NXB ĐH Quốc gia Hà Nội.